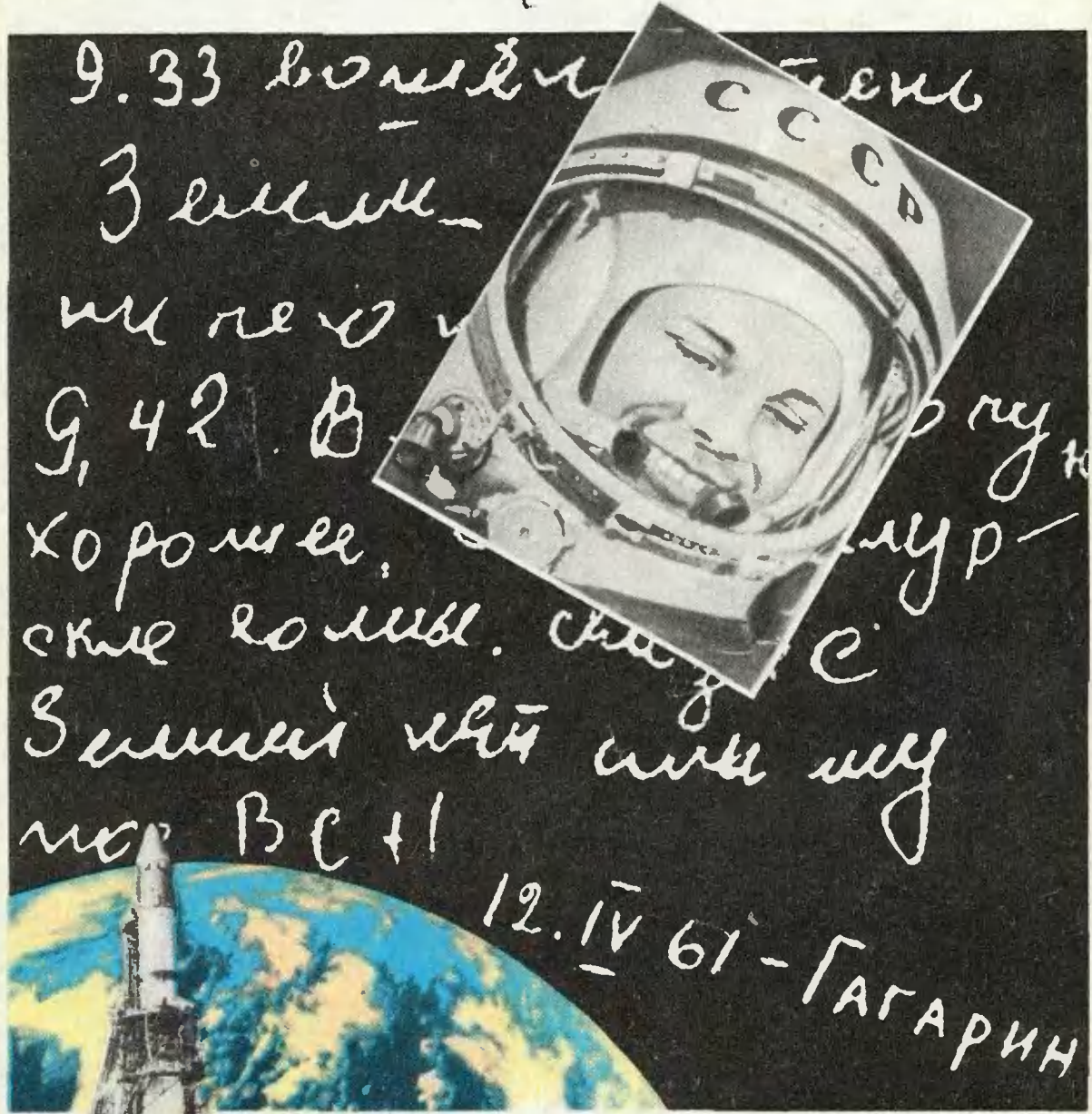
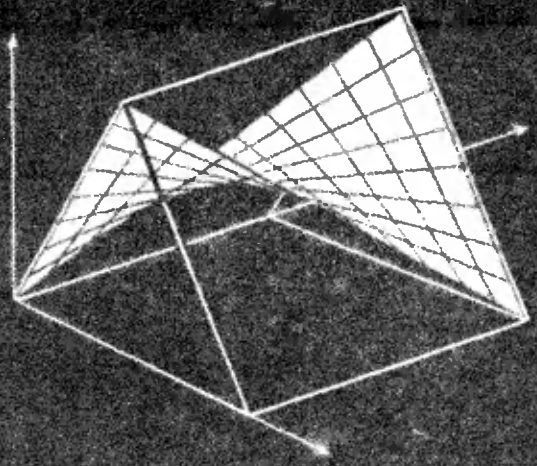
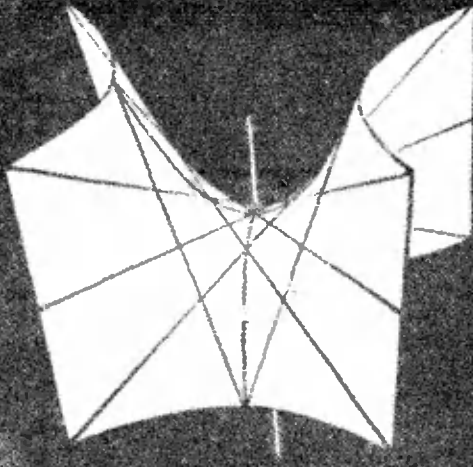


Квант

4
1986

Научно-популярный физико-математический журнал
Академии наук СССР и Академии педагогических наук СССР





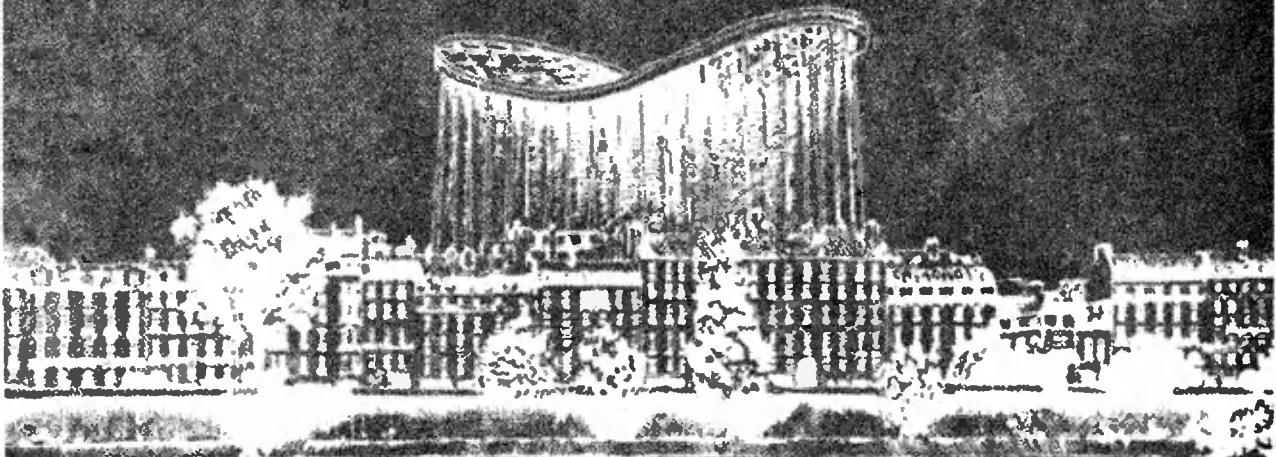
На этой страничке в разных видах показана седлообразная поверхность, известная математикам под названием гиперболический параболоид. Ее можно задать в пространственной системе координат $Oxyz$ уравнением $z = xy$ — тогда она выглядит так, как показано на рисунке слева сверху. Этот рисунок заимствован из замечательной книги Д. Гильберта и С. Кон Фоггеса «Низкая геометрия» (М.: Наука, 1981 г., с. 33), которую мы рекомендуем приобрести всем любителям геометрии.

Обратите внимание, раздвигая портрет поверхности $z = xy$, на прямые, лежащие на ней (например на координатные оси Ox и Oy). Можно доказать, что через каждую точку поверхности проходит ровно две прямые, целиком в ней содержащиеся. Более того, вся поверхность образована бесконечным семейством прямых, соединяющих две фиксирован-

ные скрещивающиеся прямые. Таких семейств — две; составляющие их прямые называются прямолинейными образующими, их можно рассмотреть на рисунке справа сверху.

Однако гиперболический параболоид — не только развлечение для любителей геометрии. Он очень часто используется в архитектуре для создания крыш и перекрытий: наличие прямолинейных образующих позволяет составить красивую, необычно изогнутую поверхность из обыкновенных (прямоугольных) элементов. Здание с такой крышей показано на рисунке внизу. Такая же крыша имеется у здания плавающего бассейна спорткомплекса «Олимпийский» в Москве.

У гиперболического параболоида есть и другие, менее известные приложения. Например, в биологии. Так, рисунок справа сверху взят из статьи Н. М. Яблова о популяционной генетике из этого номера «Кванта».





Издательство «Наука». Главная редакция физико-математической литературы



В НОМЕРЕ:

IN THIS ISSUE:

2	<i>Г. М. Гречко.</i> К читателям «Кванта»	<i>G. M. Grechko.</i> To the readers of <i>Kvant</i>
3	<i>Т. К. Бреус.</i> Снова на свидание с Марсом	<i>T. K. Breus.</i> Another date with Mars
5	<i>И. М. Яглом.</i> Генетика популяций и геометрия	<i>I. M. Yaglom.</i> Population genetics and geometry
13	<i>В. А. Бронштэн.</i> Как движется Луна?	<i>V. A. Bronshten.</i> How the Moon moves
18	<i>А. В. Бялко.</i> Полет к Солнцу	<i>A. V. Byalko.</i> Flight to the Sun
<hr/>		
22	Лаборатория «Кванта» <i>А. А. Боровой.</i> Капилляры и смачивание	Kvant's lab <i>A. A. Borovoy.</i> Capillaries and moistening
<hr/>		
25	Школа в «Кванте» Математика 10	Kvant's school Mathematics 10
48	Избранные школьные задачи	Selected school problems
<hr/>		
27	«Квант» для младших школьников Задачи	Kvant for younger school children Problems
28	<i>А. П. Савин.</i> Рисунок помогает рассуждать	<i>A. P. Savin.</i> Drawings help your reasoning
<hr/>		
32	Калейдоскоп «Кванта»	Kvant's kaleidoscope
<hr/>		
31	Задачник «Кванта» Задачи М976 — М980; Ф988 — Ф992	Kvant's problems Problems M976 — M980; P988 — P992
36	Решения задач М956 — М960; Ф968 — Ф972	Solutions M956 — M960; P968 — P972
<hr/>		
43	Искусство программирования. <i>Ю. В. Котов.</i> Посмотрим на экран	The art of programming <i>Yu. V. Kotov.</i> Looking at the display
<hr/>		
46	Полупроводниковые элементы вычислительной техники VIII. Регистры	Semiconducting elements in computers VIII. Registers
<hr/>		
49	Практикум абитуриента <i>А. И. Бuzдин, С. С. Кротов.</i> Тепловые процессы в газах	College applicant's section <i>A. I. Buzdin, S. S. Krotov.</i> Heat processes in gases
<hr/>		
53	Варианты вступительных экзаменов	Entrance examination problems
<hr/>		
58	Информация Заочная физическая школа при МГУ	Information Moscow university physics correspondence school
<hr/>		
59	Ответы, указания, решения Смесь (4) Шахматная страничка Неподвижные фигуры (3-я с. обложки)	Answers, hints, solutions Miscellaneous (4) The chess page Motionless pieces (3rd cover page)



К читателям «Кванта»
обращается летчик-космонавт СССР,
дважды Герой Советского Союза,
доктор физико-математических наук
Г. М. Гречко

Дорогие друзья!

Сегодня мы встречаем двадцатипятилетие начала эры полетов человека в космос. Четверть века назад, 12 апреля 1961 года Юрий Гагарин ступил первым на тот путь, который ныне становится все более наезженной магистралью.

25 лет — мало и много. Мало — ибо события тех лет настолько ярки и незабываемы, что кажутся совсем недавними. Много — потому что за четверть века меняются поколения и в мире техники, и среди людей.

В первых полетах космонавт был единственным в корабле, а основное занятие его — испытания корабля и самого себя в экстремальных условиях. За то время, пока космонавты первого набора ожидали своего второго полета, сама космическая техника и задачи исследований изменялись настолько, что приходилось не раз и не два проходить переподготовку. Слетать дважды по схожей программе просто не представлялось возможным. Каждый полет был полетом в неведомое. Работа в космосе, научные и технические эксперименты делали лишь первые, не всегда уверенные, шаги...

Сегодня, по прошествии четверти века, возникло новое поколение космической техники и новое поколение космонавтов. Их теперь не просто числом больше, они теперь больше летают (как дольше, так и чаще). Можно всерьез говорить о профессионализме, «многообразности», что ли, космонавтов, об отечественной школе их подготовки.

С развитием орбитальных комплексов открылись особенно широкие возможности научного эксперимента в уникальных условиях космоса. Теперь космический экипаж — коллектив экспериментаторов, где взаимовыручка и помощь не исключают углубленной специализации по отдельным проблемам.

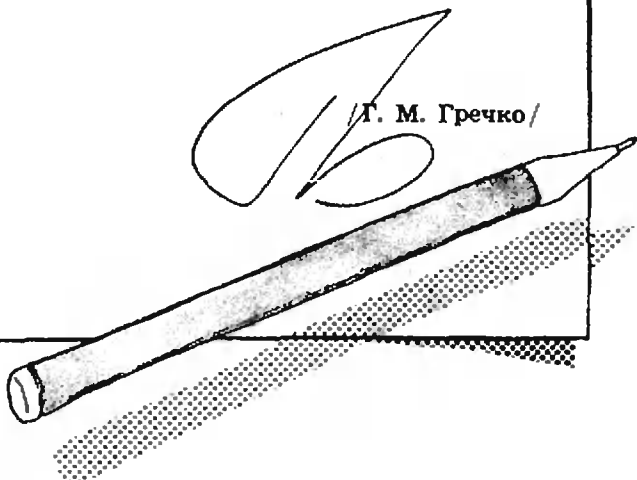
Как пример — исследования оптических явлений в околоземном пространстве. Серебристые и перламутровые облака, светящиеся «усы» сумеречной атмосферы и полярные сияния над горизонтом, расплющенное Солнце и мерцающие звезды на восходах и заходах — вот далеко не полная палитра любопытнейших явлений верхней атмосферы. Трижды мне посчастливилось быть участником экспедиций на орбитальные станции, и полученный за это время обширный материал наблюдений составил содержание многих научных работ. Обработка результатов этих наблюдений приносит немалую пользу.

И как радостно знать, что результат эксперимента нужен науке, так и горестно слышать, как строятся планы приспособления космоса к целям уничтожения. Досадно, что средства уходят на осуществление военных программ, что наличие оружия массового уничтожения приводит к недоверию.

Хочется верить, что люди мира преодолеют опасные планы, и мы будем свидетелями и участниками многих мирных научных экспериментов в космическом пространстве.

С уважением

Г. М. Гречко /



Снова на свидание с Марсом

Кандидат физико-математических наук
Т. К. БРЕУС

Венера и Марс — ближайшие соседи Земли. Вместе с Меркурием они составляют так называемую земную группу планет, сходных по своим свойствам (массам, размерам, составу) и, по-видимому, по происхождению и эволюции.

Пожалуй, ни с какой другой планетой солнечной системы человечество не связывало такого множества легенд, экзотических гипотез и смелых фантазий, как с планетой Марс. Из-за своего чуть красноватого цвета Марс казался нашим предкам зловещим. Собственно, с этим связано само название планеты и ее спутников: в переводе с греческого «Марс» — бог войны, «Фобос» и «Деймос» — страх и ужас. Не удивительно ли, что предсказанные сказочными лапутянскими астрономами в знаменитых «Путешествиях Гулливера» Дж. Свифта два спутника Марса были действительно обнаружены спустя полтора столетия американским астрономом А. Холлом! А обнаруженные итальянским астрономом Дж. Скиапарелли «марсианские каналы», породившие оптимистические надежды на существование «братьев по разуму» на Марсе, оказались естественными геологическими структурами — руслами «высохших рек»!

Теперь, когда число космических станций, посылаемых к Марсу, исчисляется десятками, надо признаться, что мечтатели и оптимисты разочарованы, специалисты многое узнали, но загадок и гипотез не убавилось, хотя они уже не столь экзотичны, как раньше. Первые серьезные исследования Марса советскими автоматическими межпланетными станциями серии «Марс» были проведены в 1971 году. А сейчас в Советском Союзе идет подготовка нового космического проекта исследований Марса и двух

его спутников. Этот проект получил название «Фобос». Академия наук СССР пригласила участвовать в проекте научные организации социалистических стран, а также ФРГ, Австрии, Финляндии, Швеции и Европейского Космического агентства.

Два космических аппарата будут запущены с космодрома Байконур в июле 1988 года и в течение двухсот дней по дороге к Марсу будут исследовать Солнце и свойства межпланетной среды. Затем аппараты станут искусственными спутниками Марса и начнут «жить» на круговой орбите, по которой обращается вокруг Марса его естественный спутник Фобос. Один из аппаратов начнет «охоту» за Фобосом, постепенно приближаясь к нему, чтобы рассмотреть его с «разных точек зрения». Второй аппарат либо следует за первым, либо направится к Деймосу.

Оба спутника Марса, по-видимому, являются захваченными Марсом астероидными телами. Астероиды, так же как и кометы, не претерпели серьезных геологических изменений с момента образования солнечной системы. По этой причине исследование астероидов и комет дает возможность судить об условиях формирования тел солнечной системы и их последующей эволюции. А это очень важно для понимания происхождения и эволюции Земли, проблемы происхождения жизни.

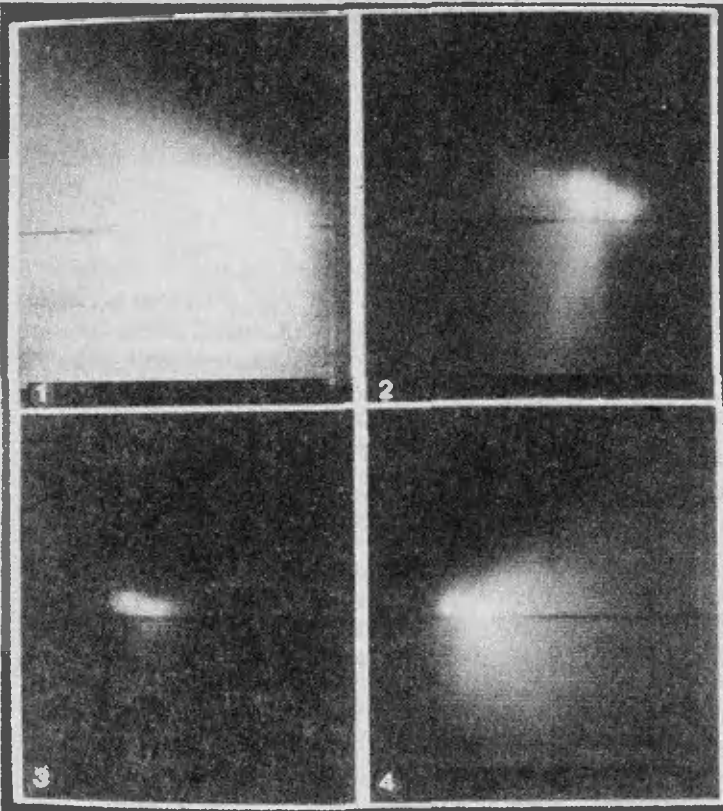
Первый шаг на этом пути уже сделан — космические аппараты «Вега» встретились с кометой Галлея. В проекте «Фобос» будет осуществлено, по-видимому, непосредственное знакомство с астероидным телом — с Фобосом.

Можно многое рассказать об интересных задачах проекта «Фобос». С орбиты искусственного спутника Марса будут проводиться исследования самой планеты — ее рельефа, поверхности, атмосферы и т. д. Есть и задачи по изучению свойств Марса как планеты в целом. В одном из таких экспериментов, называемом условно «Плазма», будет исследоваться ионосфера Марса.

Как и у Земли, ионосфера Марса состоит из плазмы, содержащей электроны и ионы. В ионосферах Земли и других планет концентрация заряженных частиц сначала увеличивает

9 марта 1986 года.
«Вега 2» встречается
с кометой Галлея

Эти изображения были получены телевизионными камерами, установленными на станции «Вега 2», во время пролета станции вблизи кометы Галлея за несколько секунд до максимального сближения (1), при максимальном сближении (2, 3) и через несколько секунд (4), уже при отлете от кометы. В момент максимального сближения расстояние от «Веги 2» до кометы — примерно 8 тыс. км. Изображения были переданы на Землю в реальном времени и воспроизведены на дисплеях в Институте космических исследований АН СССР.



ся с ростом высоты, достигая максимума на некоторой высоте, а затем начинает спадать.

В проекте «Фобос» предполагается получить высотное распределение концентрации электронов в верхних слоях ионосферы Марса. Изучение ионосферы важно само по себе, так как ее свойства определяют во многом «жизнь» планеты. Кроме того, знание «устройства» ионосферы планеты поможет ответить на вопрос: есть ли у Марса собственное магнитное поле?

С тех пор, как открыли солнечный ветер — потоки плазмы, испускаемой Солнцем в межпланетное пространство, — стало ясно, что планеты существуют не в космической пустоте.

Обдувающий планеты солнечный ветер — чрезвычайно разреженная среда, содержащая всего несколько частиц или несколько десятков частиц в 1 см^3 . Однако, если у планеты нет экрана — собственного магнитного поля, две плазмы — солнечная и планетная (ионосферная) — интенсивно взаимодействуют друг с другом. В результате этого взаимодействия образуется резкая верхняя граница ионосферы, разделяющая две плазмы — ионосферную и солнечную. Ионосферная плазма под «напором» солнечного ветра оказывается поджатой со

стороны Солнца. Именно это происходит у Венеры, не имеющей собственного магнитного поля.

Совершенно другая картина наблюдается у Земли. Земля имеет защитный экран — собственное магнитное поле, которое «останавливает» поток солнечного ветра далеко от земной поверхности. Ионосфера Земли защищена таким образом от солнечного ветра и ведет себя в основном независимо от него.

А что происходит на Марсе? Собственное магнитное поле у Марса есть, но оно очень слабое, в десятки тысяч раз слабее, чем у Земли. Но все-таки оно есть! (Венера пока единственная немагнитная планета из исследованных). Однако неясно, служит ли марсианское магнитное поле таким же экраном для планеты, как земное поле для Земли. Если — да, то верхняя ионосфера Марса должна вести себя так же (или похожим образом), как земная. Если же — нет, если магнитное поле Марса настолько мало, что солнечный ветер не «ощущает» его присутствия, то ионосфера Марса должна быть похожа на венерианскую.

Ответы на этот и многие другие вопросы ждут ученые от экспедиции к Марсу и Фобосу.

Генетика популяций и геометрия

Доктор физико-математических наук
И. М. ЯГЛОМ

Математика и нематематика

В ряду всех наук математика занимает совершенно особое, принадлежащее лишь ей одной место. Естественные науки — физика, химия, астрономия, биология, геология, минералогия, ... — изучают мир, в котором мы живем; гуманитарные науки — лингвистика, литературоведение, юриспруденция (право), история, этика, эстетика, социология, ... — изучают человеческое общество в разных его проявлениях, то есть также нечто реально существующее, поддающееся наблюдениям и даже эксперименту. В противоположность этому математика исследует некоторые абстрактные конструкции, вроде числа $\sqrt{2}$ или (также на самом деле не существующей в природе!) линии, не имеющей ширины, а только длину; точнее всего объекты математики можно определить, указав, как, скажем, в геометрии, полный список аксиом, которым эти объекты должны удовлетворять. При этом выдающаяся роль математики связана с приложимостью ее как к естественным, так и к гуманитарным наукам, с возможностью «математического моделирования» объектов реального мира. При математическом моделировании производится такое отождествление этих объектов с теми или иными математическими понятиями, при котором отношения между этими понятиями достаточно точно передают отношения между интересующими нас реальными «вещами». Это и позволяет изу-

чать эти «вещи» с помощью чисто математических рассуждений. Эту общую схему использования математики мы проиллюстрируем здесь на примере изучения явлений наследственности, точнее, популяционной генетики.

Наследственность

Следуя простейшей классической схеме, идущей от Г. Менделя*), мы сосредоточим внимание на каком-то одном передающемся по наследству признаке, который определяется парой *генов*; таким признаком является, например, цвет шерсти (черный или коричневый) морских свинок. Каждый из *генов*, ответственных за этот признак, может быть одного из двух типов — *G* или *g*: один из них, обозначаемый большой буквой *G*, задает *доминантный* (главенствующий) вариант признака (в нашем примере — черная окраска), другой — *g* — *рецессивный* (подавляемый) вариант (коричневая окраска). Это означает, что внешний вид гибридной свинки *H* со смешан-

*) Австрийский естествоиспытатель Грегор Иоганн Мендель (1822—1884), служивший настоятелем монастыря на территории нынешней Чехословакии, заложил основы современного учения о наследственности (генетики).



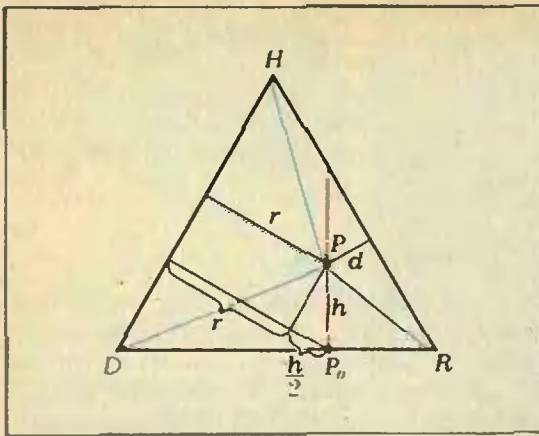


Рис. 1. Если сторона $\triangle DHR$ равна $2a$ ($a = 1/\sqrt{3}$, так как высота $\triangle DHR$ равна 1), то его площадь $S_{DHR} = a = S_{DHP} + S_{RDP} + S_{HRP} = ad + ah + ar$, поэтому $d + h + r = 1$.

ным набором генов (генотипом) Gg будет таким же, как у доминантной особи D с генотипом GG (гибридные морские свинки — черные). Напротив, рецессивная особь R с генотипом gg внешне отличается от доминантной и гибридной особей.

Закон наследования рассматриваемого признака можно сформулировать так: один из двух своих генов потомок получает от отца, другой — независимо от первого — от матери, причем оба гена отца, как и оба гена матери имеют одинаковые шансы передаться потомку. Поэтому у двух черных морских свинок могут родиться коричневые детеныши (если родители гибриды); как нетрудно понять, в достаточно большом потомстве такой пары они будут составлять примерно четверть.

Задача 1. Выясните, какие доли будут составлять доминантные, гибридные и рецессивные особи в (достаточно большом) потомстве брачной пары каждого из 6 возможных типов (D, D) , (D, R) , (R, R) , (H, D) , (H, R) и (H, H) .

Биологические популяции и геометрические точки

Рассмотрим определенную биологическую популяцию, то есть (достаточно обширную) совокупность особей одного вида, такую что образование брачных пар происходит лишь внутри этой совокупности. В генетике популяций изучается изменение от поколения к поколению долей d , h и r доминантных, гибридных и рецессивных особей, где, например, d — это отноше-

ние числа доминантных особей в популяции к числу всех особей. С этой точки зрения популяция P характеризуется тройкой неотрицательных чисел (d, h, r) , удовлетворяющих очевидному условию $d + h + r = 1$.

Рассмотрим правильный треугольник DHR с высотой 1. Заметим, что сумма расстояний d, h, r от любой точки P этого треугольника до его сторон HR, RD, DH постоянна и равна 1 (рис. 1). Мы будем называть числа d, h, r координатами точки P (относительно треугольника DHR) и писать, как и в случае обычных координат, $P = P(d, h, r)$. Как видно из рисунка 2, эти координаты тесно связаны с обычными прямоугольными координатами в пространстве.

Таким образом, каждой популяции P , характеризуемой долями d, h и r доминантных, гибридных и рецессивных особей, можно сопоставить обозначаемую той же буквой точку $P(d, h, r)$ треугольника DHR ; в частности, популяциям, состоящим только из доминантных, гибридных или рецессивных особей отвечают, соответственно, вершины $D(1, 0, 0)$, $H(0, 1, 0)$ и $R(0, 0, 1)$ нашего треугольника.

Задача 2. Выразите расстояние между точками $P(d, h, r)$ и $P_1(d_1, h_1, r_1)$ через их координаты относительно треугольника DHR . (Указание: воспользуйтесь рисунком 2.)

Очень важной генетической характеристикой популяции является относительный состав ее генофонда, то

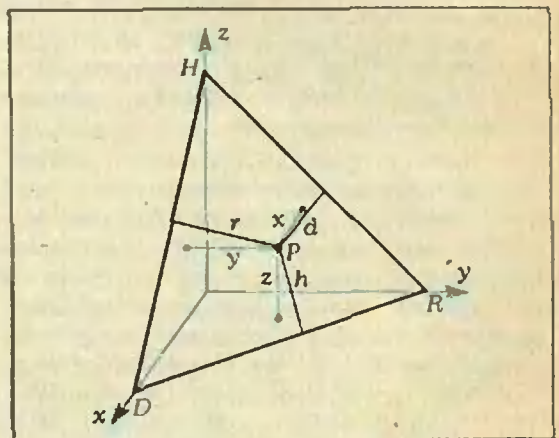


Рис. 2. Популяции $P(d, h, r)$ можно сопоставить точку P пространства с координатами $(x, y, z) = \sqrt{2/3} \cdot (d, h, r)$. Все эти точки принадлежат правильному треугольнику DHR — пересечению плоскостей $x + y + z = \sqrt{2/3}$ с положительным октантом $\{x > 0, y > 0, z > 0\}$. При этом расстояния от точки P до сторон треугольника DHR будут как раз равны d, h, r .

есть доли генов G и g в совокупности генов всех особей, входящих в популяцию; эти доли мы будем обозначать буквами Γ и $\gamma=1-\Gamma$. Легко понять, что для популяции $P(d, h, r)$

$$\Gamma=d+h/2, \gamma=r+h/2.$$

Каков геометрический смысл этих величин? Из рисунка 1 видно, что Γ и γ — это d - и r -координаты проекции P_0 точки $P(d, h, r)$ треугольника DHR на сторону DR . Таким образом, популяции с заданным составом генофонда $\Gamma:\gamma$ ($\Gamma+\gamma=1$) изображаются точками треугольника DHR , лежащими на перпендикуляре к стороне DR , проведенном из точки P_0 ($\Gamma, 0, \gamma$).

Теперь можно сформулировать нашу основную задачу. Возьмем некоторую популяцию P , изображаемую точкой $P=P(d, h, r)$ треугольника DHR и рассмотрим наследственную популяцию P' , то есть совокупность всех особей, порожденных брачными парами из популяции P . Популяции P' также отвечает некоторая точка треугольника DHR . Как устроено «наследственное преобразование», переводящее точку P треугольника DHR в его точку P' ?

Примеры

Скрещивание с «доминантами». Предположим, что особи популяции $P=P(d, h, r)$ скрещиваются с одними лишь доминантными особями D . Тогда один из генов каждого потомка заведомо будет доминантным. Второй ген, наследуемый от родителя из популяции P , выбирается как бы в два этапа: можно считать, что сначала случайным образом выбирается родитель, а затем — один из двух его генов. При этом все гены в генофонде популяции P совершенно равноправны, и следовательно, доля потомков, у которых этот второй ген будет иметь тип G , просто равна доле Γ этих генов в генофонде популяций, а ген g перейдет к γ -й части потомства. В первом случае образуются доминантные, во втором — гибридные особи. Итак, доли d' , h' и r' особей типов D , H и R в наследственной популяции P' составят

$$d'=\Gamma=d+h/2, h'=\gamma=h/2+r, \\ r'=0.$$

Выясним, как устроено соответствующее преобразование $f_1: P \rightarrow P'$

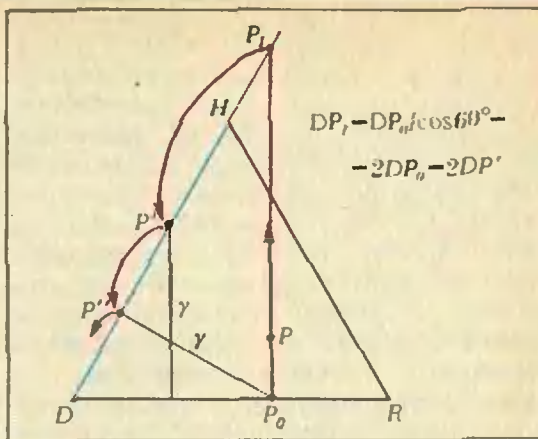


Рис. 3. треугольника DHR . Сравнивая координаты точек $P'(\Gamma, \gamma, 0)$ и $P_0(\Gamma, 0, \gamma)$ (напомним, что P_0 — это проекция P на DR ; рис. 3), мы видим, что точка P' лежит на стороне DH на расстоянии $DP'=DP_0$ от вершины D . Пусть P_1 — точка пересечения прямых P_0P и DH , то есть проекция P на прямую DH в направлении, перпендикулярном DR (в дальнейшем для краткости будем говорить просто «в направлении h »). Тогда очевидно, $DP_1=2DP_0$, то есть $DP'=DP_1/2$. Другими словами, для того, чтобы получить из P точку $P'=f_1(P)$ надо спроектировать P на прямую DH в направлении h , а затем приблизить вдвое полученную точку P_1 к точке D .

Итак, наследственное преобразование f_1 представляет собой результат последовательного выполнения (композицию) двух преобразований: параллельного проектирования в направлении h на прямую DH и гомотетии с центром D и коэффициентом $1/2$.

Отсюда видно, что это преобразование переводит весь треугольник DHR (множество всех возможных популяций) в один отрезок — сторону DH (множество популяций без рецессивных особей). При этом единственная точка, которую наше преобразование оставляет на месте (неподвижная точка преобразования), — это точка D , как и должно быть с точки зрения генетики. Следующие за P' поколения потомков исходной популяции, очевидно, изображаются образами точки P' при последовательных гомотетиях с центром D и коэффициентом $1/2$ и становятся все ближе к чисто доминантной популяции D .

Скрещивание с «гибридами». Пусть теперь особи популяции $P=P(d, h, r)$ скрещиваются только с гибридными особями H . Рассуждая, как в первом примере, мы получим, что половина потомков получит от гибридного родителя ген G , а другая половина — g , причем в каждой из этих половин особи, у которых вторым геном (наследуемым от родителя из популяции P) будет G , составят долю Γ , а особи со вторым геном g — долю γ . Следовательно, для наследственной популяции $P'(d', h', r')$ имеем

$$d' = \frac{\Gamma}{2} = \frac{d}{2} + \frac{h}{4}, \quad h' = \frac{\Gamma}{2} + \frac{\gamma}{2} = \frac{1}{2}, \\ r' = \frac{\gamma}{2} = \frac{r}{2} + \frac{h}{4}.$$

Сравнивая координаты точек $P'(\Gamma/2, 1/2, \gamma/2)$ и $P_0(\Gamma, 0, \gamma)$, убеждаемся, что точка P' получается из P при гомотетии с центром H и коэффициентом $1/2$ (рис. 4). А это значит, что преобразование f_2 , переводящее P в P' , можно представить как композицию проектирования в направлении h на прямую, соединяющую середины M и N сторон DH и HR нашего треугольника, и гомотетии с центром в середине T отрезка MN и коэффициентом $1/2$.

Из этого представления непосредственно видно, что наследственное преобразование f_2 сразу переводит треугольник DHR (множество всех популяций) в среднюю линию MN (множество популяций, наполовину состоящих из гибридов) и имеет единственную неподвижную точку (устойчивую популяцию, сохраняющую свой состав) — точку T ($1/4$,

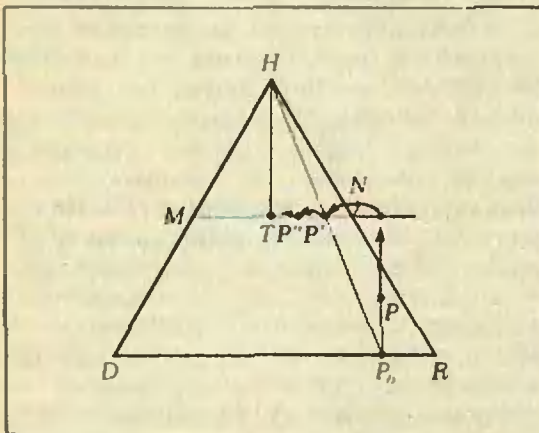


Рис. 4.

$1/2, 1/4$). Последовательные поколения $P', P''=f_2(P'), \dots$ изображаются точками прямой MN ; каждая из них переходит в следующую при гомотетии с центром T и коэффициентом $1/2$ (проектировать их, конечно, уже не нужно). Поэтому популяции P', P'', \dots неограниченно приближаются к устойчивой популяции T .

Задача 3. Пусть f_{abc} — наследственное преобразование, отвечающее скрещиванию популяции $P(d, h, r)$ с фиксированной популяцией $P(a, b, c)$ (конечно, $a, b, c \geq 0$ и $a+b+c=1$); например, f_{100} и f_{010} — это рассмотренные в тексте преобразования f_1 и f_2 . Запишите формулы преобразования f_{abc} и выясните его геометрический смысл, найдите устойчивые популяции. Что происходит при многократном повторении преобразования f_{abc} ?

Панмиксия.

Закон Харди — Вейнберга

Рассмотренные выше наследственные преобразования f_1 и f_2 имеют, в первую очередь, учебный характер. Гораздо большее значение для популяционной генетики играет наследственное преобразование $P'=f(P)$, где популяция потомков P' получается в предположении чисто случайного образования пар из состава популяции P — этот метод образования брачных пар биологи называют *панмиксией* (полным смешиванием особей популяции). При этом считается, что в женской и мужской частях популяции $P(d, h, r)$ доли особей каждого из типов D, H, R одинаковы (и, конечно, равны d, h, r). Ясно, что произвольный наугад выбор брачных пар и последующий выбор пары генов, передаваемой потомку (по одному гену от родителя), можно заменить *прямым случайным выбором пары генов из генофонда популяции P* . При этом частота, с которой будут возникать пары GG (то есть доля d' доминантных особей в наследственной популяции P'), будет равна Γ^2 , частота пар Gg и gG (доля h гибридных особей) — $2\Gamma\gamma$, а пар gg (доля r рецессивных особей) — γ^2 . Итак,

$$d' = \Gamma^2 = (d+h/2)^2, \\ h' = 2\Gamma\gamma = 2(d+h/2)(h/2+r), \\ r' = \gamma^2 = (h/2+r)^2$$

(обратим внимание на то, что $d'+h'+r'=(\Gamma+\gamma)^2=1$).

Формулы в рамке выражают один из основных законов популяционной

генетики — так называемый закон Харди — Вейнберга, с которого начинается буквально любое изложение этой столь важной сегодня дисциплины; они показывают, как меняется состав популяции при условии «чистого смешивания» — при отсутствии каких-либо дополнительных факторов, регулирующих образование брачных пар.

Выясним геометрический смысл преобразования f (то и есть закона Харди — Вейнберга). Заметим, прежде всего, что состав генофонда популяций P' и P одинаков, поскольку

$$\Gamma' = d' + h'/2 = \Gamma^2 + \Gamma\gamma = \Gamma(\Gamma + \gamma) = \Gamma.$$

Как мы уже знаем, это значит, что точки P и P' лежат на прямой, перпендикулярной стороне DR . Положим теперь $DP_0 = x$ (рис. 5), тогда $\gamma = r_0 = x \sin 60^\circ = x\sqrt{3}/2$, следовательно,

$$h' = 2\Gamma\gamma = 2(1-\gamma)\gamma = \sqrt{3}x(1-x\sqrt{3}/2).$$

Как известно, в обычной (прямоугольной) системе координат (рис. 5) это уравнение при $0 \leq x \leq DR = 2/\sqrt{3}$ задает дугу Π параболы; отметим, что в наших «координатах относительно треугольника DHR » она имеет уравнение $h^2 = 4dr$ (поскольку $h'^2 = 4\Gamma^2\gamma^2 = 4d'r'$). Легко проверить, что эта парабола проходит через точки D , R и T (середицу средней линии MN) и касается в этих точках прямых DH , RH и MN .

Таким образом, точка $P' = f(P)$ лежит на пересечении перпендикуляра к DR , проведенного через P , и указанной параболы, другими словами,

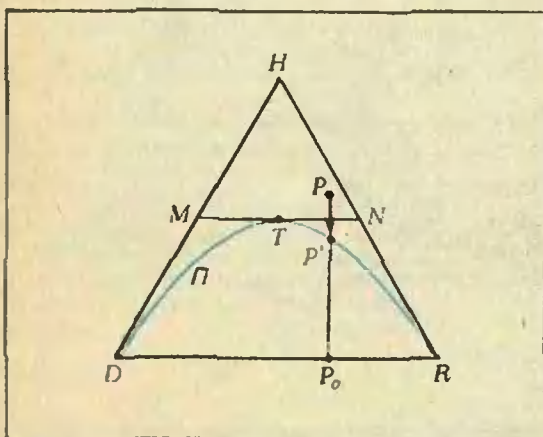


Рис. 5.

преобразование f есть параллельное проектирование треугольника DHR на дугу Π параболы в направлении h .

Отсюда сразу вытекает, что все точки дуги Π неподвижны, то есть все популяции $P(d, h, r)$ такие, что $h^2 = 4dr$ устойчивы относительно наследственного преобразования f . Последний результат, в определенном смысле, является парадоксальным: из него следует, что в достаточно большой популяции при отсутствии мутаций и (искусственного или естественного) отбора эволюция всегда осуществляется за один шаг. Дальнейшее скрещивание особей в таких условиях уже не меняет относительного состава популяции: если $P' = f(P)$, $P'' = f(P')$, и т. д., то $P' = P'' = \dots$ Однако в реальной жизни такие идеализированные условия скрещивания никогда не имеют места: выполняются они всегда лишь более или менее приближенно. Поэтому и закон Харди — Вейнберга задает лишь первое приближение к реально протекающим в биологических популяциях процессам; степень же отличия реальных процессов биологической эволюции от этого грубого описания находится с помощью дальнейших, усложненных математических моделей (см., например, задачу 4). Разумеется, полученные с их помощью результаты надо каждый раз сравнивать с наблюдениями над живой природой.

Задача 4. Пусть брачные пары в популяции P образуются чисто случайно (как при панмиксии), но гибриды отличаются по жизнеспособности от доминантных и рецессивных особей; точнее, из общего числа гибридов наследственной популяции в живых остается лишь k -я часть (при $k > 1$ это означает, что напротив, сохраняется лишь $(1/k)$ -я часть особей типов D и R). Опишите соответствующее геометрическое преобразование треугольника DHR . Как оно устроено при $k = 0$ (полное вымирание гибридов) и при $k = \infty$ (полное вымирание особей D и R)?

* * *

Закон Харди — Вейнберга был независимо открыт в 1908 г. в Кембридже молодым английским математиком Годфри Харольдом Харди и в Вене австрийским врачом Вильгельмом Вейнбергом. (Впоследствии историки науки установили, что пятью годами раньше тот же закон — в несколько другой его форме — был указан английским биологом У. Е. Кастлом, работа которого, од-

нако, никем не была замечена.) Любопытно отметить, что выдающийся специалист в области теории чисел Г. Х. Харди являлся воинственным адептом «чистой» науки: в своей научной автобиографии «Апология математика» (к сожалению, эта интересная книга на русский язык не переведена) он с темпераментом доказывает преимущества яркой и богатой идеями «чистой» математики перед «прикладной» наукой, совершенно незаслуженно казавшейся ему скучной; хороший курс математического анализа Харди вызывающе назван «Курсом чистой математики». Однако сегодня более 90 % всех упоминаний имени Харди в научной и учебной литературе связано не с его выдающимися работами теоретико-числового содержания, а с единственным юношеским его «грехом» — с выполненной в молодости прикладной работе по популяционной генетике, содержание которой мы только что изложили.

Поговорим о дальтонизме

Выше мы рассмотрели самую простую генетическую схему, когда какой-то признак, проявляющийся внешне в двух вариантах, определяется парой генов, каждый из которых может быть двух типов. Однако и число генов, и число их различных типов, да и законы их внешнего проявления могут быть другими. Об одной из таких более сложных систем передачи наследственных признаков мы сейчас коротко расскажем.

Известны наследственные признаки, встречающиеся у женщин гораздо реже, чем у мужчин. К ним относятся, например, гемофилия (несвертываемость крови) и цветовая слепота (неспособность различать некоторые цвета, чаще всего красный и зеленый). Вторую из этих болезней впервые описал страдавший ею знаменитый английский химик Дж. Дальтон (1766—1844); по его имени она впоследствии была названа дальтонизмом. Сам Дальтон считал, что это чисто мужская болезнь. Здесь он ошибался, что и не удивительно: по статистике дальтоники составляют 8 % среди мужчин и только 0,5 % среди женщин. Причину этого различия объяснил один из создателей современной генетики, американский биолог Т. Г. Морган (1866—1945), следующим образом.

Ген дальтонизма, доминантный вариант G которого обеспечивает нормальное зрение, а рецессивный g — цветовую слепоту, помещается в так называемой X -хромосоме. Эта хромосома вместе с другой — Y -хромосомой — определяет пол человека*); в клетках женского организма имеется по две

X -хромосомы, в клетках мужского — одна X - и одна Y -хромосома. Наследственный организм получает одну хромосому от матери (конечно, X) и одну от отца (она и определяет пол потомка). Таким образом, мужчины получают свой единственный ген дальтонизма (или любого другого признака, сцепленного с полом, то есть связанного с X -хромосомой) от матери; женщины — один ген от матери и один от отца.

Рассмотрим теперь некоторую популяцию P и ряд ее наследственных популяций P', P'', \dots , возникающих при чисто случайном образовании брачных пар (панмиксии; возможно, здесь уже уместнее было бы говорить не о дальтонизме, а о розовоглазии у мушек-дрозофил — сцепленном с полом признаке, тщательно изученном Морганом). нас интересует генетическая структура этих популяций в ее изменении, в частности, доли рецессивных женских и мужских особей — с генотипами gg и g ; именно они и будут дальтониками.

Возможны три женских генотипа — GG , Gg и gg , и два мужских — G и g ; их доли в женской и мужской частях популяции P обозначим через d, h, r, δ и ρ , доли генов G и g в генофонде женской части P — через Γ и γ . Тогда аналогичные величины для популяции P' равны:

$$d' = \Gamma\delta, h' = \Gamma\rho + \gamma\delta, r' = \gamma\rho;$$

$$\delta' = \Gamma, \rho' = \gamma;$$

$$\Gamma' = \frac{1}{2}(\Gamma + \delta), \gamma' = \frac{1}{2}(\gamma + \rho)$$

(объясните, почему!).

Изучим преобразование $P \rightarrow P'$ с помощью геометрической модели. В силу соотношений $d + h + r = \delta + \rho = \Gamma + \gamma = 1$ все параметры, описывающие состав популяции, можно выразить через три, скажем, Γ, δ и h . Таким образом, каждой популяции P можно сопоставить точку пространства с координатами (Γ, δ, h) относительно некоторой прямоугольной системы координат. Поскольку должны выполняться неравенства $0 < \Gamma < 1, 0 < \delta < 1, 0 < h < 2\Gamma$ и $h < 2\gamma = 2(1 - \Gamma)$ (последние два в силу того, что $h/2 = \Gamma - d = \gamma - r$), эти точки

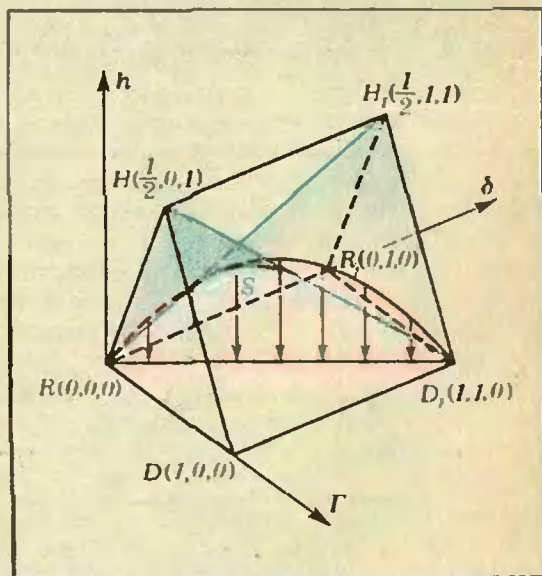


Рис. 6.

* Так же обстоит дело у других млекопитающих и некоторых насекомых.

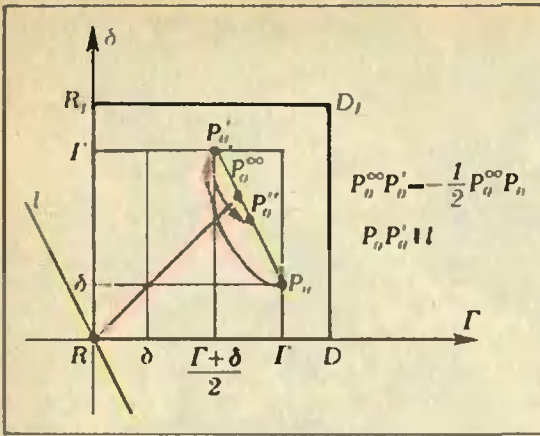


Рис. 7.

лежат в треугольной призме $DHRD, H_1R_1$, ограниченной плоскостями $\delta=0, \delta=1, h=0, h=2\Gamma$ и $h=2-2\Gamma$ (рис. 6). Наследственное преобразование переводит точку призмы $P(\Gamma, \delta, h)$ в точку $P'(\Gamma', \delta', h')$. Из равенств $h'=\Gamma(1-\delta)+(1-\Gamma)\delta=\Gamma+\delta-2\Gamma\delta=$

$$=2\Gamma-4\Gamma\delta'+2\delta'^2$$

следует, что точка P' и все следующие точки P'', P''', \dots лежат на поверхности S , удовлетворяющей уравнению $h=2\Gamma-4\Gamma\delta+2\delta^2$ (рис. 6; подробнее об этой поверхности рассказывается на 2-й с. обложки, см. также задачу 7), поэтому эти точки однозначно восстанавливаются по своим проекциям P'_0, P'_1, \dots на плоскость $h=0$. Как видно из формул $\Gamma'=(\Gamma+\delta)/2, \delta'=\Gamma$ и рисунка 7, отрезок $P_0P'_0$ параллелен прямой l с уравнением $\delta=-2\Gamma$ и делится диагональю R_0D_1 грани $R_0D_0D_1R_1$ нашей призмы в отношении 2:1; преобразование, переводящее P_0 в P'_0 , называется косым сжатием к прямой R_0D_1 вдоль прямой l с коэффициентом $-1/2$. Ясно, что все точки P'_0, P'_1, \dots , получаемые многократным применением к точке P_0 , лежат на прямой $P_0P'_0$ и приближаются к точке P_0 , пересечения этой прямой с P_0D_1 ; точка P_0 , как и все точки отрезка R_0D_1 , неподвижна при нашем преобразовании. «Поднимая» точки с плоскости $h=0$ на поверхность S , получаем следующий результат: последовательные поколения потомков популяции P приближаются по своему составу (причем очень быстро) к устойчивой популяции P_∞ ; соответствующая ей точка, как и все точки, изображающие устойчивые популяции, лежит на линии пересечения поверхности S с плоскостью $\Gamma=\delta$ (покажите, что эта линия — парабола!).

Для любой устойчивой популяции $\Gamma=\delta$; можно найти остальные величины, характеризующие ее генетический состав:

$$q=\gamma=1-\delta, d=\delta^2, h=2\delta q, r=q^2.$$

В частности, при $q=0.08$ найдем, что $r \approx 0.006$, что примерно совпадает с приведенными выше частотами распространения дальтонизма среди мужчин и женщин.

* * *

Мы пытались показать, как геометрические модели придают нагляд-

ность задачам популяционной генетики и позволяют решать эти задачи элементарно-геометрическими рассуждениями, получая «задешево» глубокие закономерности. Мы надеемся, что читатель сумеет теперь самостоятельно проводить подобные рассуждения, решая предложенные здесь задачи.

Задачи

5. Пусть за единицу масштаба по оси h принят отрезок длины $\sqrt{3}/2$ (а по осям Γ и δ — длины 1), так что призма $DR\dots H_1$ — правильная. Докажите, что расстояния от точки $P(\Gamma, \delta, h)$ до оснований призмы равны δ и q , а до боковых граней — пропорциональны соответствующим значениям d, h, r .

6. Докажите, что плоскости $\delta=\text{const}$ и $\delta-2\Gamma=\text{const}$ пересекают поверхность S по прямым, а все остальные плоскости, параллельные оси h — по параболом.

7. Выразите координаты предельной популяции P_∞ через координаты (Γ, δ, h) исходной популяции P .

8. Пусть произвольная популяция $P(\Gamma, \delta, h)$ скрещивается с фиксированной популяцией $P_0(\Gamma_0, \delta_0, h_0)$ по следующей схеме: каждая женская особь из P скрещивается с взятой наугад мужской особью из P , а каждая мужская особь из P — с взятой наугад женской особью из P_0 . Обозначим через $P_1=f_0(P)$ наследственную популяцию.

а) Выразите координаты Γ_1, δ_1, h_1 , а также остальные параметры популяции P_1 через координаты популяций P и P_0 .

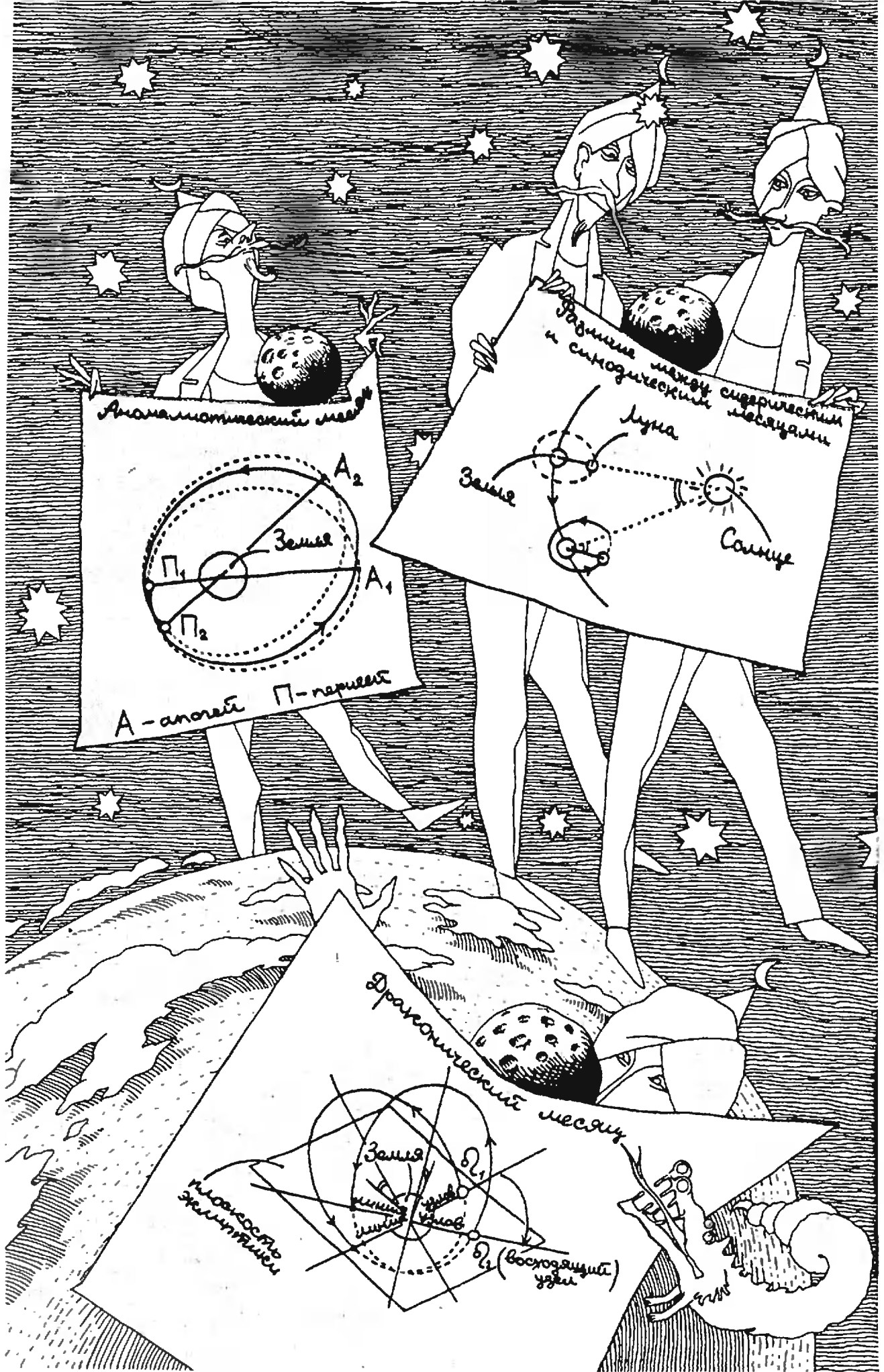
б) Пусть $P_2=f_0(P_1), P_3=f_0(P_2)$ и т. д.; наконец $P_\infty=\lim_{n \rightarrow \infty} P_n$. Выразите координаты популяции P_∞ через координаты популяций P и P_0 .

в) Рассмотрите частные случаи, отвечающие тем или иным конкретным составам популяции P_0 , например, случаю $P_0=P_0(1, 1, 0)$ (случай чисто доминантной популяции P_0) и др., а также случай, когда популяция P_0 принадлежит множеству популяций, устойчивых относительно преобразования, рассмотренного в тексте.

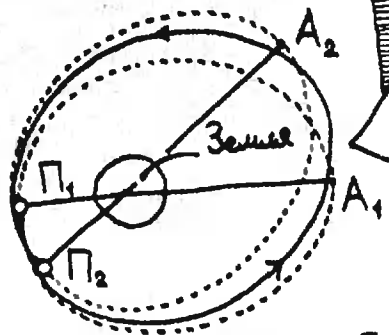
г) Опишите геометрически отображения $f_0: P \rightarrow P_1$ и $f_\infty: P \rightarrow P_\infty$ как преобразования призмы.

Исправка

В «Кванте» № 2 на с. 29 в задаче № 2 и рисунке к ней должно быть $(HO)^2=ВАНЯ, В+А+Н+Я=НО$ или, например, $(OH)^2=ЕГОР, Е+Г+О+Р=ОН$.

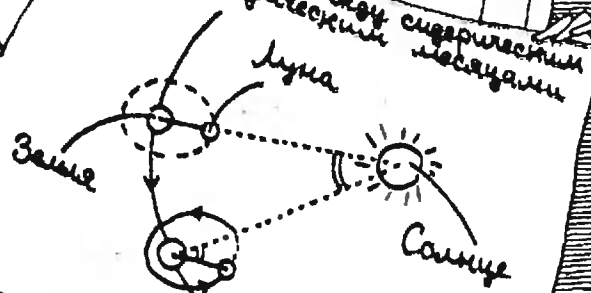


Аномалистический месяц

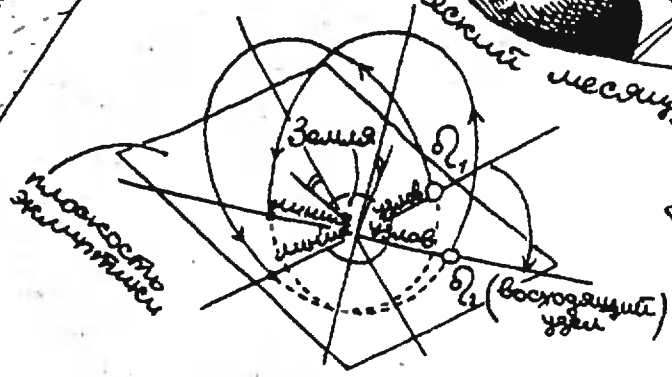


A - апогей Π - перигей

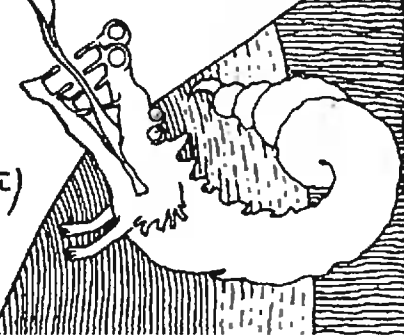
Движение лунной сферической поверхности и синодический месяц



Драконический месяц



число оборотов



Как движется Луна?

Кандидат физико-математических наук
В. А. БРОНШТЭН

Вероятно, многие читатели «Кванта» удивятся: до чего легкий вопрос! Все знают, что Луна — единственный естественный спутник Земли — движется по эллипсу, совершая один оборот за 27,3 суток. И движение это происходит в строгом соответствии с законами Кеплера, являющимся следствием закона всемирного тяготения, открытого Ньютоном. Все это верно, но...

Теория движения Луны оказалась одной из самых сложных задач небесной механики, на решение которой ушло два с половиной века (считая только от Ньютона). В разработку этой теории вложили труд такие замечательные ученые, как Эйлер, Клеро, Даламбер...

Так в чем же были трудности? Как их удалось преодолеть?

Четыре лунных месяца

Движение Луны изучали еще астрономы Древнего Вавилона. Они тщательно регистрировали моменты солнечных и лунных затмений. По этим данным древнегреческий астроном Гиппарх (II век до н. э.) определил длительность основных периодов, характеризующих движение Луны. По традиции мы будем называть их «месяцами».

Таких месяцев с древних времен было известно четыре. *Сидерический*, или *звездный, месяц* — это период обращения Луны вокруг Земли; он определяется по перемещению Луны относительно неподвижных звезд. *Синодический месяц* — промежуток времени между двумя последовательными новолуниями (или полнолуниями). *Аномалистический месяц* — это период между двумя последовательными прохождением Луны через перигей своей орбиты. Наконец, *драконический месяц* — это промежуток времени между двумя прохождением Луны через восходящий узел ее

орбиты — точку пересечения орбиты с плоскостью эклиптики (теперь мы знаем, что это не что иное как плоскость земной орбиты, но во времена Гиппарха Земля считалась неподвижной, а плоскость эклиптики считалась плоскостью орбиты, по которой Солнце двигалось вокруг Земли).

Гиппарх рассчитал, основываясь на датах наблюдений затмений древними астрономами, что через каждые 345 лет положения Солнца, Луны, перигея и узлов лунной орбиты повторяются; иначе говоря, 345-летний цикл содержит целое число всех четырех месяцев. Выводимые из цикла Гиппарха продолжительности лунных месяцев лишь на немногие доли секунды отличаются от тех значений, которыми пользуются астрономы теперь, накопив наблюдения еще за 21 столетие (эти значения приведены на с. 14).

Почему синодический месяц длиннее сидерического, объяснить нетрудно. Смена лунных фаз зависит от положения Луны относительно Солнца. Луна вместе с Землей обращается вокруг Солнца. Направление этого движения совпадает с направлением обращения Луны вокруг Земли. В результате движение Луны по ее «околоземной» орбите происходит как бы с отставанием: повторение лунных фаз происходит не через сидерический месяц, а через более длительный период, который и назван синодическим месяцем. Нетрудно получить такое соотношение между длительностями сидерического (S) и синодического (P) месяцев:

$$\frac{1}{S} = \frac{1}{P} + \frac{1}{T},$$

где T — длительность земного года (в сутках).

Тот факт, что аномалистический месяц длиннее сидерического, по существу означает, что сама лунная орбита как целое вращается (в собственной плоскости), и линия, соединяющая перигей и апогей орбиты (то есть большая ось лунного эллипса), называемая линией апсид, поворачивается в том же направлении, в каком движется Луна. Так что Луне приходится постоянно «догонять» свой перигей.

Драконический месяц, напротив, короче сидерического. Это значит, что

линия узлов поворачивается навстречу движению Луны.

Причина поворота большой оси лунного эллипса и линии узлов была найдена лишь в XVIII веке, после создания Ньютоном теории всемирного тяготения. А еще через два столетия эта теория позволила рассчитать траектории движения искусственных спутников Земли, обрела, так сказать, вторую молодость. Но — обо всем по порядку.

Лунные неравенства

С именем древнегреческого астронома Клавдия Птолемея (ок. 100 — ок. 165) обычно прежде всего связывают его геоцентрическую систему мира, против которой боролись Коперник, Джордано Бруно, Галилей, Кеплер. Но Птолемей внес большой вклад в развитие астрономии, в частности, в теорию движения Луны. Правда, в тот период речь могла идти только о кинематической теории, ибо причины и истинные законы движений небесных тел известны не были.

В течение длительного периода развития астрономической науки считалось, что небесные тела могут двигаться только равномерно по окружностям. Если движение выглядело более сложным, то его можно было представить комбинацией движений по нескольким окружностям. Именно так поступил Птолемей с Луной.

Движение Луны по небу было неравномерным. Чтобы представить его комбинацией равномерных движений по окружностям, надо было сначала определить величину отклонений от равномерного движения, или так называемых неравенств. И во времена Птолемея, и даже во времена Кеплера и много позже было принято называть «неравенствами» отдельные компоненты отклонения положения Луны от положения воображаемой точки, движущейся по эклиптике равномерно с периодом, равным сидерическому месяцу. Таким образом, слово «неравенство» в астрономии означало совсем не то, что оно означает в математике. Впрочем, в современной науке мы встречаемся с подобными примерами буквально на каждом шагу. Так, слово «элемент» означает в химии одно, а в электротехнике совсем другое. Никто не спутает ядро кометы, ядро живой клетки и ядро атома. А сейчас мы встретимся с еще одним примером употребления привычных нам терминов в ином смысле.

Все положения на небе Луны, Солнца, звезд и планет уже во времена Птолемея измерялись в системе координат, напоминавших географические долготу и широту. И назывались эти координаты почти так же: астрономическая долгота и астрономическая широта. Только широта небесных светил отсчитывалась от плоскости эклиптики (напомним, что в те времена так называлась плоскость, в которой лежала орбита Солнца, обращаясь вокруг Земли), а долгота — от точки весеннего равноденствия, в которой Солнце раз в год пересекает небесный экватор. Взглянув за определение лунных неравенств, Птолемей рассматривал в основном неравенства по долготе, выводя широту по наклону лунной орбиты, равному 5° . — Именно таким определил этот угол Гиппарх, «муж трудолюбия и поклонник истины», как назвал его Птолемей. (По современным данным Гиппарх ошибся всего на 8 минут дуги).

Общее неравенство E движения Луны по долготе Птолемей представил следующей формулой (в современных обозначениях):

$$E = 6^\circ 15' \sin l + 1^\circ 18' \sin (2D - l) + 19' \sin 2l.$$

Лунные месяцы

29,53059
сутки

Синодический
(от слова *synodion* - встреча)

27,55455
сутки

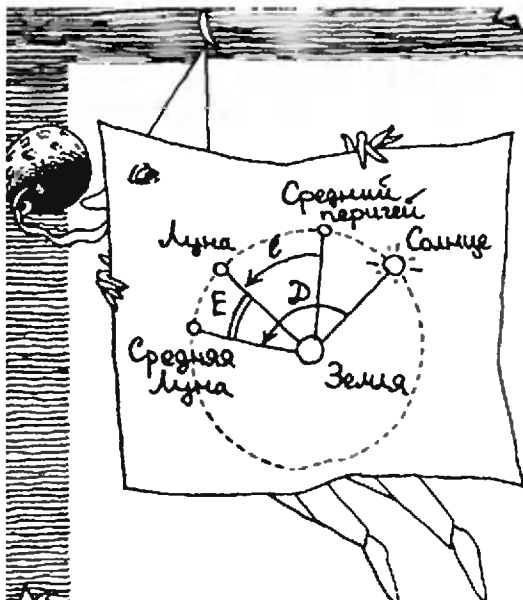
Аномалистический
(число расстояний Луны от ее перигея называли аномалией)

27,32166
сутки

Сидерический
(*sidereus* - звездный)

27,21222
сутки

Драконический
(узлы орбиты обозначают значком \oslash , похожим на дракона)



Здесь l — угловое расстояние Луны от среднего перигея ее орбиты, D — угловое расстояние Луны от Солнца. Из формулы Птолемея следовало, что лунные неравенства — периодические и являются как бы суммой нескольких отдельных неравенств. Так, первый и третий члены правой части формулы зависят от положения Луны относительно перигея своей орбиты. Их сумма получила название *главного эллиптического неравенства*. Но это название было дано не Птолемеем, а учеными в XVII веке, когда уже было известно, что Луна движется по эллипсу.

Второй член, в который входит угловое расстояние Луны от Солнца, связан с влиянием Солнца на движение Луны. Много позже, уже в XVII веке, он получил название *звекции*, а в конце того же столетия Ньютон дал ему исчерпывающее объяснение. Но об этом — чуть ниже.

Николай Коперник (1473—1543), используя свои более точные наблюдения (впрочем, он, как и Гиппарх и Птолемей, наблюдал невооруженным глазом!), уточнил коэффициенты формулы Птолемея, определил крайние и среднее значения расстояния от Земли до Луны (в единицах земного радиуса), причем ошибка в среднем расстоянии составляла всего 0,1 % (!) против современного значения.

Новый шаг вперед в создании кинематической теории движения Луны сделал замечательный датский астроном-наблюдатель Тихо Браге (1546—1601). Он открыл третье по счету неравенство, получившее название *вариации*. В формуле для E , это допол-

нительный член вида $40' \sin 2D$. Затем Тихо Браге обнаружил еще одно, четвертое лунное неравенство, выражаемое членом $(-11' \sin l')$, где l' — угловое расстояние Солнца от перигея земной орбиты (Земля проходит перигелий своей орбиты 1—2 января). Так как период последнего неравенства равен году, оно получило название *годового уравнения*. Здесь мы снова встречаемся с примером иного употребления всем привычного термина. Словом «уравнение» во времена Тихо Браге и вплоть до наших дней астрономы называли некоторые математические величины. Так, до сих пор в астрономии сохранился термин «уравнение времени», означающий разность среднего и истинного солнечного времени.

Тихо Браге открыл также, что угол наклона лунной орбиты к эклиптике может изменяться в пределах $\pm 9,5'$ от среднего значения $5^\circ 8'$, причем наибольшего значения наклон орбиты достигает, когда направление Земля—Солнце совпадает с линией узлов лунной орбиты, а наименьшего — когда они перпендикулярны.

Истинную форму лунной орбиты установил Иоганн Кеплер (1571—1630), доказавший, что Луна, как и планеты, движется по эллипсу. На основе трех законов планетных движений, открытых Кеплером, Исаак Ньютон (1643—1727) вывел закон всемирного тяготения, нашел ту силу, которая заставляет небесные тела двигаться по эллиптическим и иным орбитам.

От кинематики — к динамике

Развитие небесной механики, основанной на теории тяготения Ньютона, вселяло надежду, что и теория движения Луны будет построена без особого труда и все лунные неравенства получат простое объяснение. И действительно, Ньютон добился в этой области немалых успехов. Он показал, что неравенства являются следствием влияний Солнца на Луну (так называемых солнечных возмущений). Из анализа этих влияний он теоретически получил значения основных лунных неравенств.

Ньютон количественно объяснил движение узлов лунной орбиты и периодическое изменение ее наклона к

эклиптике. Но когда он попытался вывести скорость смещения лунного перигея, то получил результат, вдвое меньший наблюдаемого.

Да, теория движения Луны оказалась крепким орешком и для самого Ньютона, и для длинного ряда его последователей. В чем же состояла главная трудность?

Мы знаем, что основная сила, действующая на планеты, — притяжение Солнца. Под действием этой силы планета должна описывать кеплеров эллипс. Притяжение других планет, массы которых в тысячи, сотни тысяч и миллионы раз меньше массы Солнца, приводит лишь к небольшим отклонениям от кеплерова эллипса, которые принято называть возмущениями. Эти возмущения невелики и их нетрудно вычислить. (Известно, что по возмущениям в движении Урана астрономы Дж. Адамс и У. Леверье независимо вычислили положение и орбиту неизвестной до того планеты, вызывающей эти возмущения, — ею оказался Нептун.)

В случае Луны дело обстоит совершенно иначе. Луна в своем обращении вокруг Земли постоянно подвергается возмущению со стороны самого массивного тела солнечной системы — Солнца. К тому же эти возмущения изменяются в течение аномалистического месяца (с изменением расстояния от Луны до Земли) и в течение года (с изменением расстояния от Земли до Солнца).

Конкурс Петербургской академии наук

Прошло три четверти века со времени публикации бессмертного труда Ньютона «Математические начала натуральной философии». И хотя сам Ньютон пытался разработать теорию движения Луны, его теория не давала требуемой точности. А ведь в те годы теория движения Луны имела практическое значение: по астрономической долготе Луны определяли географическую долготу места на Земле. Поскольку Луна перемещалась по небу в среднем на 13° в сутки, ее положение на небе в данный час зависело от долготы места. Мореплаватели и путешественники пользовались этим для определения географических долгот.

И вот в 1750 году Петербургская академия наук объявила конкурс на лучшее исследование по такой теме: «Показать, согласны ли все неравенства, которые наблюдаются в движении Луны, с ньютоновской теорией, и какой должна быть истинная теория всех этих неравенств, чтобы по ней можно было со всей точностью определять место Луны на любое время».

Эта формулировка была выбрана неслучайно. Мы помним, что Ньютон потерпел неудачу в теоретическом определении скорости смещения лунного перигея. В 1745 году эту же задачу попытались решить два замечательных французских математика — Алексис Клод Клеро (1713—1765) и Жан Лерон Даламбер (1717—1783). Оба они были членами Парижской академии наук, яркими соперниками в науке, над лунной проблемой работали совершенно независимо. Решая задачу о движении лунного перигея, они оба пришли к тому же выводу, что и Ньютон: период обращения большой оси лунного эллипса теоретически должен быть в два раза больше, чем это следует из наблюдений. Оба ученых даже высказали мысль, что закон Ньютона неточен и требует поправок. Именно это заключение столь авторитетных ученых и вызвало объявление конкурса Петербургской академии наук с приведенной выше формулировкой.

Но уже за несколько месяцев до объявления конкурса, в мае 1749 года, Клеро нашел причину «расхождения» теории Ньютона с наблюдениями. Теория была не виновата. Дело в том, что даваемое теорией аналитическое (в виде формулы) выражение для смещения перигея представляло собой степенной ряд вида $k_0 + k_1 m + k_2 m^2 + \dots + k_n m^n + \dots$, где m — отношение суточных смещений Земли и Луны по их орбитам ($m \approx 1/13$), k_n — численные коэффициенты. Значение m мало по сравнению с единицей, и каждый следующий член ряда много меньше предыдущего. И Ньютон, и Даламбер, и Клеро брали для вычисления значение смещения перигея, ограничиваясь лишь первым членом ряда. Это, как догадался Клеро, и приводило к резкому расхождению теоретически рассчитанной и реальной скорости смещения лунного перигея. Учтя в выражении для смещения второй

$$e' = \frac{m}{13} + \frac{13}{13^2} m^2 + \frac{13^2}{13^3} m^3 + \frac{13^3}{13^4} m^4 + \dots$$

$$E = \lambda + \Gamma (-3e' + \frac{1}{2} \delta^2 e') m = 293'$$

член, Клеро получил обнадеживающий результат: расхождение теории с наблюдениями уменьшилось в три с лишним раза. Чем больше членов брал Клеро, тем ближе стремилось к нулю расхождение с данными наблюдений.

В 1752 году Клеро представил Петербургской академии наук большой мемуар, озаглавленный «Теория Луны, выведенная из единственного начала притяжения, обратно пропорционального квадратам расстояний». Эта работа была удостоена назначенной премии и издана в Петербурге. В ней Клеро решает задачу на вращающемся эллипсе, каким и является в сущности орбита Луны. В своей работе Клеро впервые показал, что лунные неравенства проявляются не только в долготе и широте Луны, но и в расстоянии от нее до Земли. В формулах теории Клеро каждая из величин (долгота, широта и расстояние) выражается уже суммой из 20 членов ряда.

Работа Клеро дала толчок к новым исследованиям. Даламбер решил проверить выводы Клеро и пришел к тем же результатам, хотя и другим способом. Действительный член Петербургской академии наук Леонард Эйлер (1707—1783) усовершенствовал теорию Клеро, сделав ее более удобной для составления таблиц движения Луны. Такие таблицы вскоре были составлены немецким астрономом Тобиасом Майером. Спустя 20 лет Эйлер вновь обратился к теории движения Луны. В 1772 году он издал труд, озаглавленный «Теория движения Луны, изложенная новым способом». И действительно, в этой работе был предложен принципиально новый способ построения лунной теории.

Идеи, заложенные во второй лунной теории Эйлера, позволяющие в принципе достичь наиболее точного описания движения Луны. Однако эти идеи опередили свое время — развитие науки тогда было недостаточно, чтобы на их основе получить окончательное решение задачи. И лунные теории продолжали развиваться по старому, «протоптанному» пути.

Как строить теорию?

Теории Клеро, Даламбера и первая лунная теория Эйлера принадлежали

к классу аналитических. В этих теориях выражения для координат небесного тела (или для элементов его орбиты) выводятся как решения уравнений движения, даваемых теорией Ньютона. Построение таких теорий требовало тогда громадного труда. Создатель одной из лучших аналитических теорий французский астроном Шарль Делоне (1816—1872) затратил на нее 20 лет непрерывной работы. Зато теория Делоне может быть применена не только к Луне, но и к любому другому спутнику планеты, в том числе и к искусственному спутнику Земли.

В численных теориях целый ряд элементов орбиты берется из наблюдений, а затем уточняется в ходе расчетов. Лучшей из численных теорий движения Луны была теория немецкого астронома П. А. Ганзена (1795—1874), на основе которой были составлены таблицы движения Луны, служившие астрономам почти полвека — до начала двадцатых годов нашего столетия.

Наибольший успех выпал на долю численно-аналитических теорий, начало которым было положено второй лунной теорией Эйлера. При этом лишь немногие величины берутся из наблюдений и подставляются в уравнения движения до их решения.

В 1888 году американский астроном Джордж Хилл (1838—1914) использовал идеи Эйлера для построения своей теории движения Луны. Ему удалось получить скорость движения перигея лунной орбиты аналитически. Все неравенства движения Луны были разделены им на классы, в зависимости от того, какие величины входили в то или иное неравенство. Тем самым вся задача была как бы «расслоена» на несколько отдельных задач, каждая из которых решалась отдельно. Теорию Хилла довел до конца американский астроном Эрнест Браун (1866—1938). Ему удалось преодолеть одну за другой все оставшиеся трудности теории и достичь точности, достаточной для удовлетворения наблюдений начала и середины двадцатого века. Выражение для долготы Луны в теории Брауна содержало 552 члена, для широты — 487, для радиуса-вектора Луны — 304 члена. Были

(Окончание см. на с. 48)

$$\left(-\frac{21}{4}m - \frac{217}{52}m^2 - \frac{3095}{82}m^3 \right) \sin(e+e) + \frac{5}{4}e^2 \sin 2e + e^2 e^2 \frac{11}{16}m \sin(2e) - 2e^2 \frac{11}{16}m \sin$$

между атомными масштабами — порядка 10^{-10} м — и размерами, которые можно различить на Солнце в современный телескоп — порядка 10^6 м, — лежит огромная область. Ученые строят гипотезы, пытаются теоретически описать явления, происходящие в масштабах этого промежутка в 16 порядков. Существуют предположения о гидродинамике солнечных недр, о механизме переноса энергии из глубины к поверхности Солнца, о структуре магнитных полей. Но до настоящего понимания физики Солнца еще далеко. На сегодняшний день нет полного объяснения пятен, вспышек и множества других явлений на солнечной поверхности.

Возникает естественный вопрос. Если все так, то что же мешает подлететь к Солнцу поближе и посмотреть на его поверхность с малых расстояний? И не только посмотреть, но и исследовать ее всеми доступными средствами.

Может быть, мешает высокая температура? Для нормальной работы электронных приборов температура не должна сильно превышать привычную для них земную температуру 300 К, а аппарат попадет в область гораздо более высоких температур. Но эта проблема технически разрешима — внутри космической станции, направляющейся к Солнцу, можно устроить отсек, охлаждаемый до комнатных температур.

Конечно, пролет автоматической станции непосредственно через корону Солнца, внешнюю часть его атмосферы, может оказаться опасным для приборов не только из-за разогрева, но и по другим причинам. Например, работе электроники могут мешать мощные потоки заряженных частиц, порождающие сильные электрические и магнитные поля. Такие потоки электронов и ионов возникают при солнечных вспышках. Однако пролет с минимальным расстоянием в 4—5 радиусов Солнца относительно безопасен. Дело в том, что время пребывания автоматической станции на расстояниях, меньших 10 радиусов Солнца, при любом выборе траектории не превзойдет нескольких часов. Это время так мало потому, что велика скорость движения. На расстоянии в 4 радиуса Солнца от его центра скорость станции будет достигать 300 км/с. Так сильно разгоняет стан-

цию гравитационное притяжение Солнца.

Человечество еще ни разу не послало разведчика к Солнцу из-за трудностей, на первый взгляд, совершенно неожиданных. Оказывается, очень трудно вывести космический аппарат на траекторию, проходящую вблизи Солнца. Это кажется удивительным: Солнце — главный источник притяжения в солнечной системе, оно, казалось бы, может само притянуть к себе любое массивное тело. Однако планеты движутся вокруг Солнца и не падают на него. Падению препятствует скорость небесных тел, перпендикулярная направлению на Солнце. В этом-то все и дело. Чтобы попасть близко к Солнцу, нужно избавиться от начальной скорости, которая при старте с Земли равна скорости обращения Земли вокруг Солнца. А как известно, Земля движется по своей орбите со скоростью около 30 км/с. Ее необходимо «погасить», остановить ракету на орбите Земли — и тогда произойдет падение на Солнце.

Но тридцать километров в секунду — это очень много. До сих пор ни одна ракета до такой скорости еще не разгонялась. (Принципиально это возможно, если сделать ракету многоступенчатой, но при этом полезная нагрузка — масса космической станции — окажется чересчур малой.)

Эта фотография солнечной поверхности сделана в свете с длиной волны 656,3 нм. Если бы этот же участок Солнца в то же самое время сфотографировали в свете с длиной волны, отличающейся всего на 0,1 нм, то он выглядел бы совсем иначе.



Вычислим все же (это нам пригодится для дальнейшего), сколько времени продолжался бы такой полет от Земли до Солнца.

Траектория падения на Солнце — отрезок прямой — это предельный случай вытянутой эллиптической орбиты с большой полуосью, равной половине радиуса земной орбиты. Согласно третьему закону Кеплера, квадраты периодов обращения тел по орбитам относятся как кубы больших полуосей орбит. Значит, время t падения на Солнце (то есть половину периода обращения по вытянутой орбите с большой полуосью $R_{\oplus}/2$) можно определить из условия $(2t)^2/T_{\oplus}^2 = (R_{\oplus}/2)^3/R_{\oplus}^3$, где T_{\oplus} , R_{\oplus} — период обращения и радиус орбиты Земли. Поскольку T_{\oplus} — это 1 год, $t = 1/4\sqrt{2}$ года $\approx 0,177$ года.

Время прямого полета оказалось невелико, но начальная его скорость, увы, пока недостижима. Как же провести полет к Солнцу с наименьшими энергетическими затратами, с наименьшей стартовой скоростью? Наиболее экономичный полет использует гравитационное поле Юпитера для торможения станции на ее орбите вокруг Солнца. Но для того, чтобы осуществить этот маневр, к Юпитеру надо подлететь с определенной скоростью. А для этого, в свою очередь, необходимо, чтобы преодолев земное притяжение, станция вышла на орбиту, имея относительно Солнца начальную скорость $v_0 = 40,5$ км/с; следовательно, относительно Земли скорость станции в это время будет 10,5 км/с. Итак, полет начинается с разгона ракеты в ту же сторону, куда направлена скорость движения Земли по ее орбите. Какую стартовую скорость надо сообщить ракете?

Чтобы тело могло преодолеть земное притяжение, при старте ему нужно сообщить кинетическую энергию не меньше величины gR_{\oplus} . Эта кинетическая энергия соответствует второй космической скорости $v_{11} = \sqrt{2gR_{\oplus}} \approx 11,2$ км/с.*) Но будьте внимательны — не нужно прибавлять к 10,5 км/с вторую космическую скорость, чтобы получить стартовую! Из

закона сохранения энергии получаем, что стартовая скорость с поверхности Земли в нашем случае равна $v_{ст.} = \sqrt{(v_0 - v_{\oplus})^2 + 2gR_{\oplus}} \approx 15,5$ км/с.

Кстати, знаете ли вы, где на земной поверхности находится наилучшее (из энергетических соображений) место старта? Это вулкан Килиманджаро в Танзании, гора высотой 5,9 км почти на экваторе. С учетом сплюснутости Земли вершина вулкана — самая удаленная от центра точка земной поверхности (дальше Эвереста!). Там наименьшее на Земле ускорение свободного падения. Вершина вулкана, однако, всегда покрыта снегом, и строить там космодром пока не собираются.

Продолжим наш полет. Он проходит по участку эллиптической орбиты, пересекающей орбиту Марса и подходящей к орбите Юпитера (рис. 1). Промежуточная цель полета — Юпитер, самая большая из планет солнечной системы. Он должен затормозить станцию, погасить ее скорость относительно Солнца — тогда станция начнет падать на Солнце. Чтобы в момент подлета станции Юпитер находился в точке пересечения орбит, в момент старта он должен находиться в точке, отмеченной на рисунке 1 нулевым временем. Позаботимся еще, чтобы в момент пересечения орбиты Марса он оказался достаточно далеко от автоматической станции и не искажил ее траектории.

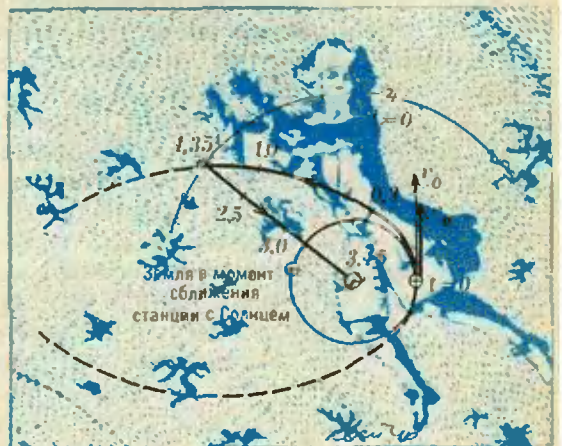


Рис. 1. Траектория полета к Солнцу с минимальной стартовой скоростью. Вдоль траектории — время полета в годах. В момент пересечения с орбитой Юпитера, через 1,35 года после старта, происходит сближение с Юпитером и торможение станции до нулевой относительно Солнца скорости. Далее космический корабль свободно падает к Солнцу.

*) В мартовском номере «Кванта» за этот год в разделе «Школа в «Кванте» была опубликована заметка «Вторая космическая скорость». Мы советуем читателям познакомиться с ней. (Примеч. ред.)

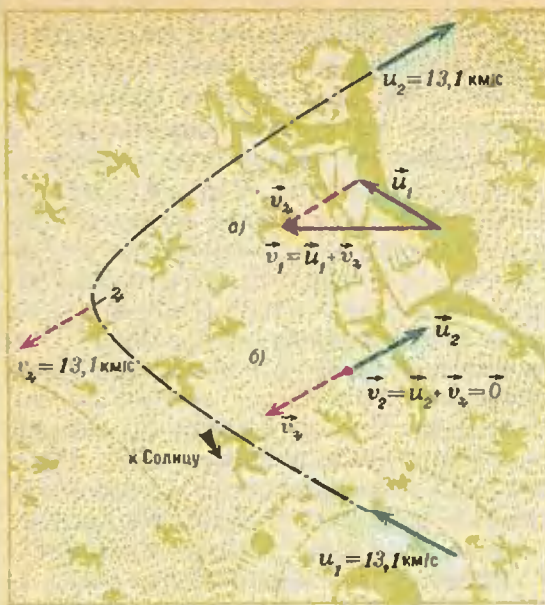


Рис. 2. Траектория корабля при сближении с Юпитером в системе отсчета, связанной с Юпитером. Справа приведена диаграмма скоростей: а) до сближения; б) после сближения.

Попав в поле тяжести Юпитера, станция будет двигаться по гиперболической траектории, огибающей эту планету (рис. 2). При этом вследствие закона сохранения энергии скорости приближения к Юпитеру и удаления от него в симметричных точках гиперболы будут по абсолютной величине одинаковы, но по направлению они могут заметно отличаться. Поэтому на траекторию облета Юпитера станция должна выйти со скоростью (относительно Юпитера) u_1 , равной по абсолютной величине скорости самой планеты (относительно Солнца) $v_1 = 13,1$ км/с. Направление облета должно быть таким, чтобы при удалении от Юпитера в точке, симметричной точке начала облета, направление скорости станции \vec{u}_2 ($|\vec{u}_2| = |\vec{u}_1| = |\vec{v}_1|$) было противоположно направлению скорости движения Юпитера по его орбите. Тогда в этой точке скорость станции относительно Солнца станет равной нулю — и под действием малого на таком большом расстоянии солнечного притяжения наш посланец начнет очень медленно приближаться к Солнцу. Эти условия выполняются в том случае, когда скорость станции относительно Солнца в начале облета Юпитера равна $v_1 = 14,3$ км/с (см. рис. 2). А это условие, в свою очередь,

и определяет начальную скорость станции на орбите — 40,5 км/с.

Итак, в системе отсчета, связанной с Юпитером, траектория станции вблизи планеты — гипербола. А в системе отсчета, связанной с Солнцем, этот участок траектории выглядит так, как показано на рисунке 3.

Сколько времени будет продолжаться такой полет к Солнцу? Мы уже вычисляли время падения на Солнце по прямой. В данном случае, когда падение начинается с орбиты Юпитера, нужно вместо земного года взять период обращения по орбите Юпитера $T_{\text{Ю}} = 11,86$ года (земного). В результате окажется, что падение займет время $T_{\text{Ю}}/4\sqrt{2} \approx 2,1$ года. Прибавим к этому время полета по эллиптическому участку траектории (до «встречи» с Юпитером) — оно оказывается равным 1,35 года. Итого, весь полет к Солнцу займет почти 3,5 года.

При взгляде на траекторию полета возникает ощущение, что это как бы Юпитер направил космическую станцию к Солнцу. На самом деле, аппарат направляют, конечно, люди. Перед подлетом к Юпитеру нужно сделать коррекцию траектории — даже небольшая ошибка при выборе расстояния пролета около Юпитера или скорости сближения с ним может испортить всю программу исследований

(Окончание см. на с. 24)

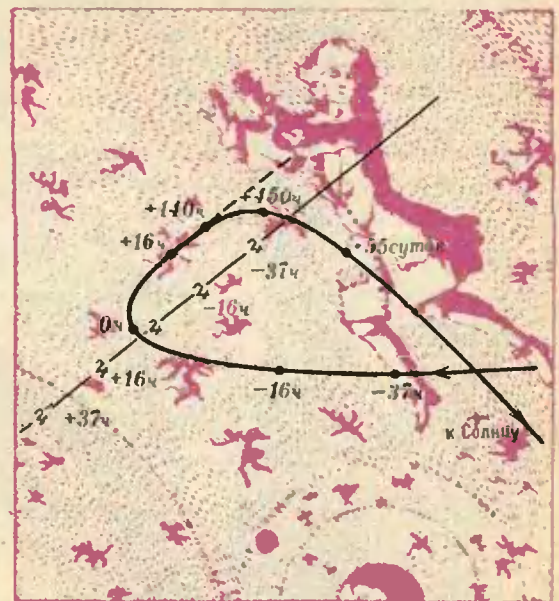


Рис. 3. Траектория корабля при сближении с Юпитером в системе отсчета, связанной с Солнцем. Вдоль кривых проставлено время относительно момента наибольшего сближения.



Капилляры и смачивание

Доктор физико-математических наук
А. А. БОРОВОЙ

Вы решили уехать загород. Собрали вещи, смотрите, не забыто ли что. И вот... на окне горшки с цветами. Захватить их с собой невозможно, и нет никого, кто мог бы поливать цветы в ваше отсутствие. Что же предпринять? Наполнить водой поддоны цветочных горшков? Такой способ полива годится не для всех растений — многие из них не терпят переизбытка влаги. А главное, он рассчитан на небольшой срок — несколько дней, неделю.

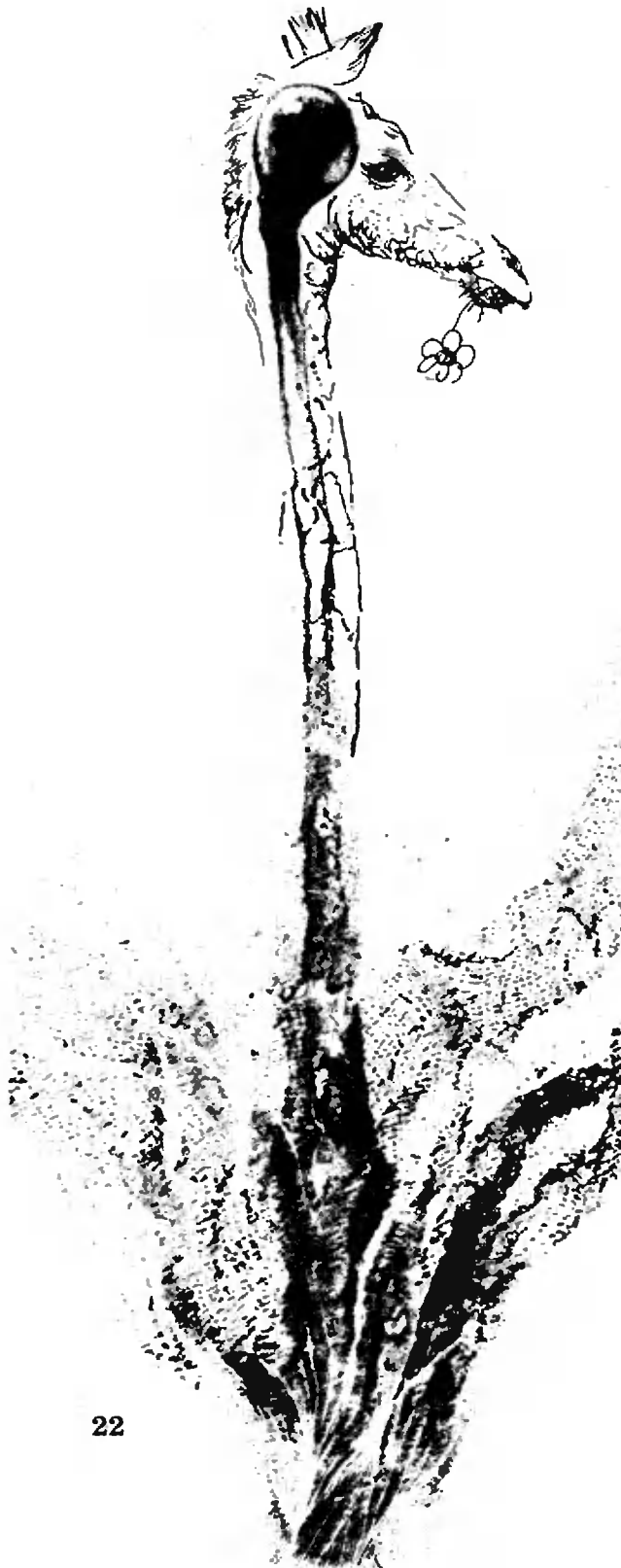
Вопрос этот не новый. Цветоводы давно придумали самые разные конструкции «автопоилок», которые действуют надежно и долго и даже дозируют воду для поливки цветов.

Простейшую автопоилку (рис. 1) можно легко сделать самим. Воду наливают во вместительный сосуд, накрытый крышкой. В этот сосуд опускают один конец туго свернутого жгута из марли, другой его конец закапывают в землю. Вода поступает к растению по жгуту, причем скорость ее поступления можно отрегулировать, изменяя толщину жгута, его наклон и т. п. Жгут следует поместить внутрь резиновой трубки, тогда вода будет меньше проливаться и испаряться по дороге к цветку.

И в жгуте, и в земле, наполняющей горшок, и частично в самих растениях вода движется и удерживается за счет явления, которое называют капиллярностью.

Капилляр — это тонкая трубка, обычно ее внутренний диаметр меньше одного миллиметра. Если капилляр, сделанный из чистого стекла, опустить в сосуд с водой, то уровень жидкости в нем будет выше, чем в сосуде (рис. 2). Чем тоньше трубка, тем больше эта разница. Происходит это вследствие смачивания водой чистого стекла. В широком стеклянном сосуде поверхность воды лишь изгибается у самых стенок.

В почве капилляры образуются между ее частичками. Благодаря им влага может подниматься на значительную высоту: до 2 метров в песке, а в чистой глине — значительно выше. Процесс идет медленно и длится иногда несколько недель и даже месяцев. (Попробуйте самостоятельно придумать и провести эксперименты, в которых можно было бы наблюдать



подъем воды в капиллярах почвы.)

Если внутренняя поверхность трубки не смачивается жидкостью, то в капилляре уровень ее ниже, чем в широком сосуде (рис. 3). Изменится и форма поверхности жидкости у стенок сосуда.

Интересно, что смачивание (или несмачивание) определяет, как поведет себя капля жидкости на поверхности другой жидкости. Например, капля подсолнечного масла или керосина растекается по воде тончайшим слоем, вплоть до мономолекулярного (то есть толщиной всего в одну молекулу)! Такое поведение смачивающих жидкостей позволило английскому физику лорду Рэлею оценить размер одной молекулы.

На большую поверхность воды он помещал капелку оливкового масла и сначала убеждался в том, что масляное пятно покрывает поверхность равномерным слоем, без масляных «бляшек» и «окошк» воды. Для этого Рэлей использовал маленькие кусочки камфары. Если такой кусочек попадает на поверхность воды, он начинает «метаться». Дело в том, что в воде камфара растворяется и при этом поверхностное натяжение воды уменьшается. Но растворение происходит неравномерно: с одной стороны частички быстрее, с другой — медленнее, и на кусочек камфары начинает действовать разность сил поверхностного натяжения, вызывающая его движение. Вы легко можете наблюдать это явление, только для того чтобы опыт прошел удачно, надо не касаться воды и кусочков камфары руками (лучше всего их соскабливать ножом прямо над поверхностью воды). А вот в масле камфара не растворяется и ведет себя спокойно.

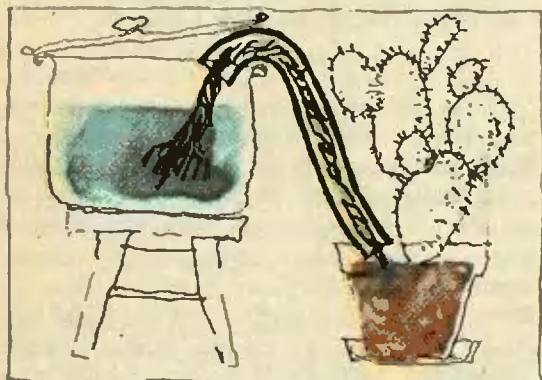


Рис. 1.

Итак, убедившись в однородности масляной пленки, ученый определял радиус пятна R и находил его толщину l :

$$l = \frac{V}{\pi R^2},$$

где V — объем капли масла. Если предположить, что капля растеклась в мономолекулярный слой, то толщина пятна — это характерный размер молекулы масла. Получилась величина, близкая к 10^{-9} м.

Смачивание очень часто приходит нам на помощь: мы смазываем трущиеся части машин, жидкая смазка обволакивает поверхность металла и удерживается на ней; расплавленное олово смачивает чистую медь, латунь, алюминий при пайке; клей растекается по поверхности склеиваемых материалов.

Практически во всех старинных осветительных приборах, начиная от древних светильников, в которых фитилек был погружен в нефть, растительное масло или жир, и кончая керосиновыми лампами, тоже использовалось явление смачивания: горючее вещество поднималось по капиллярам фитиля и постепенно сгорало.

Наблюдение такого необычного поведения жидкости, когда она движется против сил тяжести, вдохновляло многих изобретателей на создание *Perpetuum mobile* — вечного двигателя, который использовал бы свойства капилляров. Проекты были весьма разнообразными и появлялись не только в древности или в средние века, но даже и в начале XX века. Чаще всего идея заключалась в следующем: по фитилю жидкость (обычно вода) должна была подниматься из нижнего сосуда в верхний, а там уже по трубке или лотку стекать вниз, приводя в



Рис. 2.

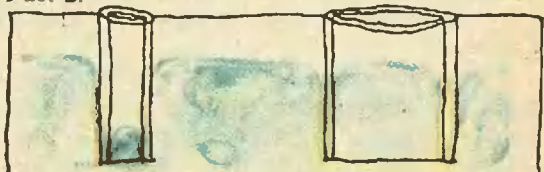


Рис. 3.

движение водяную мельницу (рис. 4). Вопрос о том, почему фитиль, сумевший поднять воду на какую-то высоту, вдруг потеряет свойство впитывать и удерживать жидкость и беспрепятственно отдаст ее в верхнем сосуде, изобретателей как-то не тревожил. Само устройство не только не работало вечно, но и вообще не работало.

Совершенно особую роль играет смачивание в условиях невесомости. Вот что рассказывал легчик-космонавт А. А. Серебров*:

«Представьте задачу: налить жидкость в сосуд без потерь. На космическом корабле вода подается из крана порциями по 25 см^3 . Предоставленные сами себе, эти порции собираются в шаровидные капли, как и положено в невесомости; эти капли в результате разных случайных воздействий потом дробятся на меньшие...

Если действовать как на Земле и наливать воду из крана в горлышко сосуда, то она станет выталкивать из сосуда воздух, в котором взвешены капли разного размера, — иными словами, будет сама же себя выталкивать.

Если же струю с малой скоростью направить сразу на стенку сосуда, то вода, смачивая стенку, прилипает к ней. Тогда взвешенных капель не будет — по крайней мере, до тех пор, пока сосуд не встряхивают. Таким способом можно без потерь налить жидкость в сосуд.

* Здесь приведен отрывок из интервью А. А. Сереброва журналу «Квант» (см. апрельский номер за 1983 год).

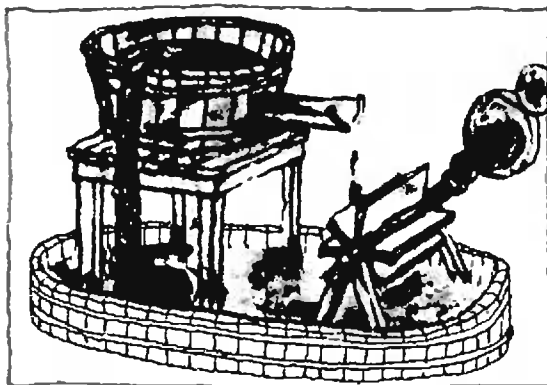


Рис. 4.

И тут же возникает второй вопрос: а как можно взять жидкость из сосуда? Ведь из-за невесомости жидкость «плавает» в сосуде в виде шаровых капель разного размера.

Конечно, если есть центрифуга, то задача решается просто: при вращении сосуда жидкость будет «прижиматься» к дальней от оси стенке, а оттуда ее можно забирать с помощью шприца. Если центрифуги нет, можно прижать жидкость к стенке, двигая сосуд с небольшим линейным ускорением. Именно так обычно и делают.

Я предложил другой способ: поместить внутрь сосуда длинный и узкий предмет, например черенок ложки, к которому капли прилипают. За счет поверхностного натяжения жидкость «расползается» по черенку и подходит к краю горловины сосуда. Слегка «помешивая» черенком, легко добиться того, чтобы жидкость постоянно находилась на черенке вблизи выходного отверстия сосуда. Задача, стало быть, решена.♦

Полет к Солнцу

(Начало см. на с. 18)

Солнца. Еще одна коррекция, уже после облета Юпитера, позволит устранить последние погрешности и точно задаст расстояние, на котором автоматическая станция пройдет около Солнца.

Одна из ключевых идей этого способа — изменение скорости космической станции при сближении с промежуточной планетой — уже использовалась в практике космических полетов. Последний тому пример —

сближение с Венерой космических аппаратов «Вега», которые после этого направились к комете Галлея.

* * *

Нам нужно понимать физические явления, происходящие на Солнце. Все следствия этих знаний предсказать невозможно. Вспомним для сравнения эпоху великих географических открытий, когда человечество знакомилось со своей планетой. Не исключено, что наше время в будущем назовут эпохой великих космических открытий. Первый полет к Солнцу станет, несомненно, одним из ее украшений.



Математика 10

Эта заметка предназначена десятиклассникам. В ней излагаются некоторые весьма полезные факты, связанные с числом e .

Производная логарифма

В учебном пособии «Алгебра и начала анализа 9—10» на с. 208 выводится формула для производной логарифмической функции. Эта формула получается там с помощью теоремы о производной обратной функции и формулы для производной показательной функции. В этой заметке мы получим формулу для производной логарифмической функции непосредственно из определения производной — нахождением соответствующего предела.

Но вначале определим Число e .

Рассмотрим криволинейную трапецию, ограниченную графиком функции $y = \frac{1}{x}$, отрезком $[1; t]$ оси Ox и прямыми $x=1$, $x=t$ (рис. 1). Площадь этой криволинейной трапеции есть функция от t — обозначим ее через $S(t)$. Эта функция на промежутке $[1; \infty[$ возрастает и непрерывна.

Доказательство непрерывности функции $S(t)$ неявно содержится в п. 59 учебного пособия «Алгебра и начала анализа 9—10»: там показывается, что функция $S(t)$ дифференцируема; всякая же дифференцируемая функция является непрерывной. Впрочем, непрерывность $S(t)$ можно вывести прямо из определения непрерывной функции. Попробуйте это сделать.

Поскольку $S(2) < 1$ (рис. 2), а $S(4) > 1$ (рис. 3; $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} > 1$), то между числами 2 и 4 существует единственное число — его обозначают буквой e , такое, что $S(e) = 1$.

На с. 200 учебного пособия «Алгебра и начала анализа 9—10» число e определяется по-другому. Можно доказать, что эти два определения эквивалентны.

Так как $e > 0$ и отлично от 1, могут быть определены логарифмы по основанию e . Эти логарифмы называются натуральными и обозначаются \ln , то есть $\ln a = \log_e a$. Так как $e > 1$,

функция $y = \ln x$ на промежутке $]0; \infty[$ возрастает.

Два важных неравенства

Докажем теперь, что для любого натурального числа n выполнено неравенство

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}. \quad (1)$$

Из неравенства (1) непосредственно следует, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

(именно так определяется число e в вузовских курсах математического анализа).

Действительно, возьмем любое число $\varepsilon > 0$ и положим $N = \left\lceil \frac{e}{\varepsilon} \right\rceil$. Тогда для любого натурального $n > N$ выполнено неравенство $n > \frac{e}{\varepsilon}$ и

$$\begin{aligned} \left| \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n - e \right| &= e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} - \\ &- \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \left(1 + \frac{1}{n} - 1\right) < \frac{e}{n} < \varepsilon. \end{aligned}$$

Зафиксируем любое натуральное число n , положим $q = 1 + \frac{1}{n}$ и рас-

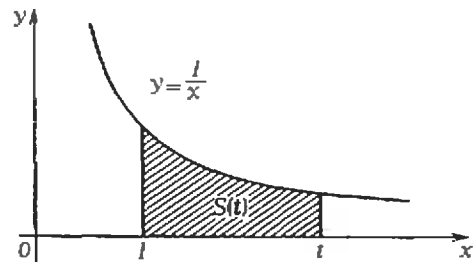


Рис. 1.

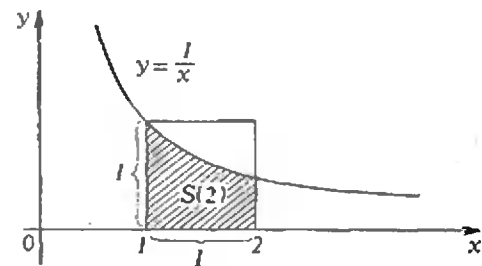


Рис. 2.

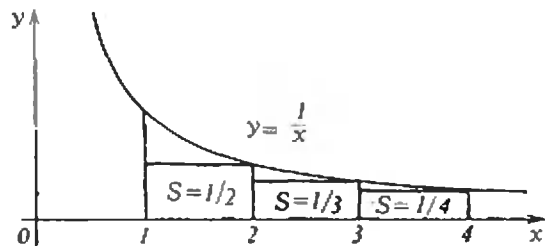


Рис. 3.

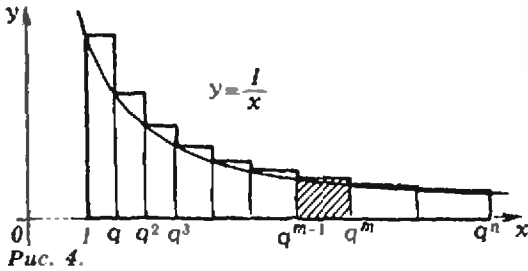


Рис. 4.

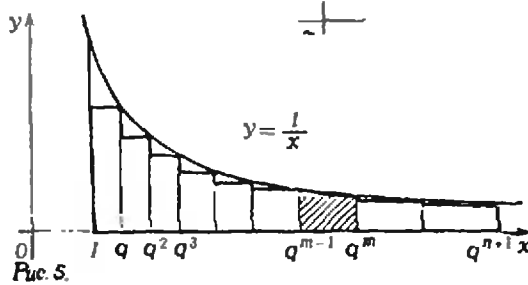


Рис. 5.

смотрим ступенчатый многоугольник с основанием $[1; q^n]$, содержащий рассматриваемую криволинейную трапецию с тем же основанием (многоугольник с красной границей на рисунке 4). Этот многоугольник состоит из n прямоугольников (один из них заштрихован) одинаковой площади: площадь каждого из них равна

$$\frac{1}{q^{n-1}}(q^n - q^{n-1}) = q - 1 = \frac{1}{n}.$$

Таким образом, площадь красного ступенчатого многоугольника равна 1, так что $S(q^n) < 1$, откуда $q^n < e$ — левая часть неравенства (1) доказана.

Теперь рассмотрим ступенчатый многоугольник с основанием $[1; q^{n+1}]$, находящийся внутри нашей криволинейной трапеции с основанием $[1; q^{n+1}]$ (многоугольник с синей границей на рисунке 5). Мы видим, что он состоит из $n+1$ прямоугольников, площадь каждого из которых равна $\frac{1}{n+1}$, так что площадь синего ступенчатого многоугольника также равна 1. Поскольку он находится внутри трапеции, получим $S(q^{n+1}) > 1$; поэтому $e < q^{n+1}$, и правая часть неравенства (1) также доказана.

Из неравенства (1) логарифмированием по основанию $e > 1$ получается неравенство, которое в дальнейшем и будет для нас основным:

$$\frac{1}{n+1} < \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}. \quad (2)$$

Замечательный предел

Докажем, что

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

Чтобы доказать это соотношение, нужно по определению предела для любого числа $\varepsilon > 0$ подобрать такое число δ , чтобы из неравенства $0 < |x| < \delta$ следовало бы неравенство

$$\left| \frac{\ln(1+x)}{x} - 1 \right| < \varepsilon. \quad (3)$$

Подбор числа δ проведем так. Если число x удовлетворяет неравенству $0 < |x| < 0,5$, возьмем натуральное число $n = \lceil 1/|x| \rceil > 2$.

При $x > 0$ будет $\frac{1}{n+1} < x < \frac{1}{n}$ и потому (в силу неравенства (2))

$$\frac{\ln(1+x)}{x} > n \ln\left(1 + \frac{1}{n+1}\right) > \frac{n}{n+2} = 1 - \frac{2}{n+2},$$

$$\frac{\ln(1+x)}{x} < (n+1) \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) < \frac{n+1}{n} = 1 + \frac{1}{n}.$$

При $x < 0$ будет $-\frac{1}{n} \leq x < -\frac{1}{n+1}$ и потому (в силу неравенства (2))

$$\frac{\ln(1+x)}{x} > -n \ln\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = n \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) =$$

$$= n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) > \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

$$\frac{\ln(1+x)}{x} < -(n+1) \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) =$$

$$= (n+1) \ln \frac{n}{n-1} = (n+1) \ln\left(1 + \frac{1}{n-1}\right) <$$

$$< \frac{n+1}{n-1} = 1 + \frac{2}{n-1}.$$

Таким образом, для любого x , удовлетворяющего неравенству $0 < |x| < 0,5$, выполнено неравенство

$$\left| \frac{\ln(1+x)}{x} - 1 \right| < \frac{2}{n-1}.$$

Значит, если n таково, что $\frac{2}{n-1} < \varepsilon$, то для соответствующих x будет выполнено неравенство (3). Но тогда

$$\frac{2}{n-1} < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{2}{\varepsilon} < n-1 \Leftrightarrow n+1 > \frac{2}{\varepsilon} + 2 =$$

$$= \frac{2+2\varepsilon}{\varepsilon} \Leftrightarrow \frac{1}{n+1} < \frac{\varepsilon}{2+2\varepsilon}.$$

И если мы возьмем $\delta = \frac{\varepsilon}{2+2\varepsilon}$, то для любого x , удовлетворяющего неравенству $0 < |x| < \delta$, имеем: $0 < |x| < \frac{\varepsilon}{2+2\varepsilon} < \frac{\varepsilon}{2\varepsilon} = 0,5$ и

$$\frac{1}{n+1} < |x| < \delta = \frac{\varepsilon}{2+2\varepsilon} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n+1 > \frac{2}{\varepsilon} + 2 \Rightarrow n-1 > \frac{2}{\varepsilon} \Rightarrow \frac{2}{n-1} < \varepsilon,$$

и поэтому выполнено неравенство (3).

Производная логарифма

По определению производной

$$\begin{aligned} \ln' x &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\ln(x + \Delta x) - \ln x}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\ln\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)}{\frac{\Delta x}{x}} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x}, \end{aligned}$$

(см. замечательный предел).

Итак, $\ln' x = \frac{1}{x}$. О. С. Ивашев-Мусатов

Задачи

1. Веселый турист пешком отправился на слет. В первый день пути он прошел $\frac{1}{3}$ пути, во второй день он прошел $\frac{1}{3}$ остатка, в третий день турист прошел $\frac{1}{3}$ нового остатка. В результате туристу осталось пройти 32 км. Сколько километров от дома туриста до места слета?

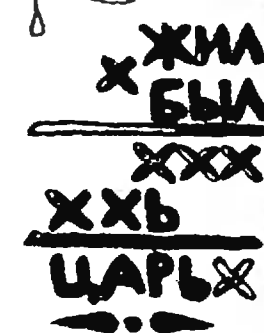
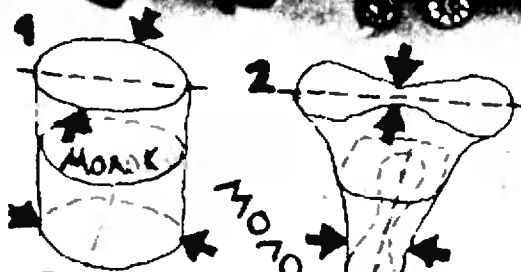
2. В № 6 журнала «Квант» в «Задачнике «Кванта» будут опубликованы задачи по математике с номерами от M986 до M990. У первой из них номер совпадает с последними тремя цифрами года выхода журнала. А в каком номере журнала номер задачи по математике совпадает полностью с номером года? (Предполагается, что в каждом номере по-прежнему будет печататься по пять задач по математике и что журнал будет выходить ежемесячно.)

3. Пожарив на сковороде яичницу, я взялся за ручку, чтобы поставить сковороду на стол, но она была очень горячая. Я обернул ручку тряпкой; но все равно было горячо. Тогда я намочил тряпку водой. Что я почувствую на этот раз?

4. Пакет для молока склеивается из цилиндрического бумажного кольца (см. рисунок). Получается треугольная пирамида. Для удобства транспортировки грани пирамиды являются равнобедренными, но не равносторонними треугольниками. Предположим, что из бумаги склеен пакет, у которого все грани — правильные треугольники. Как его теперь разрезать в цилиндрическое кольцо, высота которого равна половине длины ребра пирамиды?

5. Расшифруйте числовые ребусы, написанные на рисунке.

Эти задачи нам предложили А. П. Савин, ученик 9 класса шк. № 2 г. Гайворона Валерий Журавлев, С. С. Крогов, В. В. Произолов, И. Б. Алексеев-Астафьев.



Это - кабинет.

Рисунок помогает рассуждать

Кандидат физико-математических наук
А. И. САВИН

Это бригада, такелажники: муж соседки и я.

Однажды соседи попросили меня помочь переставить мебель в их квартире. Молодая хозяйка начала бодро руководить «бригадой такелажников», состоящей из ее мужа, отца и меня.

«Давайте поставим сервант к этой стенке, а рядом с ним — телевизор», — скомандовала Наташа. Мы дружно навалились на сервант — из него со звоном посыпалась посуда. После многочисленных «Раз-два, взяли!» «Давай-давай» — сервант утвердился на указанном месте. Однако тумбочка с телевизором никак не входила в предназначенное для нее пространство. Мы отодвинули сервант в сторону, чтобы поставить тумбочку с телевизором, но в результате сервант загородил проход в дверь.

Три часа мы перетаскивали мебель из комнаты в комнату. При этом возникали ситуации, когда, например, для того чтобы поставить в кабинет пианино, нужно было вытащить оттуда журнальный столик и все кресла, отправить их на кухню и вернуть обратно только после установки пианино. Радостная готовность «сдвинуть горы» сменилась крайней усталостью. Главным персонажем наших шуток стал Сизиф^{*)}. В некоторый момент вещи вдруг заняли свои первоначальные положения, и все мужчины дружно воскликнули: «Вот так лучше всего!» Эта история послужила мне уроком. И когда родители решили купить еще

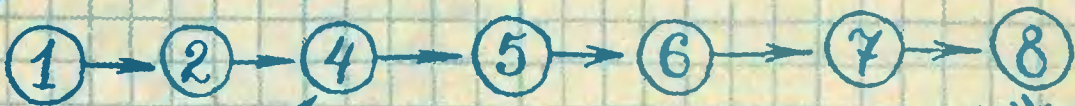
один книжный шкаф (что означало перестановку мебели в квартире), я начертил на бумаге план квартиры, вырезал прямоугольнички, соответствующие по размерам имеющейся мебели и новому шкафу, и начал экспериментировать. Изучив новую расстановку мебели, я установил последовательность перестановки:

1. Из прихожей вешалка убирается на кухню.
2. Шкаф заносится в прихожую.
3. Из гостиной сервант переносится в спальню.
4. На место серванта ставится шкаф.
5. Вешалка возвращается в прихожую.
6. Диван переносится на кухню.
7. На место дивана ставится сервант.
8. Диван переносится в спальню.

Ожидая машину со шкафом, я размышлял, нельзя ли что-нибудь переставить еще до прибытия шкафа. Я нарисовал схему (рис. 1), из которой увидел, что операции 1 и 3 от других не зависят. Немного подумав, я понял, что последовательность действий можно изменить так, что не только операции 1 и 3, но и операции 6, 7, 8 можно будет выполнить до приезда шкафа. Таким образом, рисунок помог мне найти рациональный вариант перестановки.

Более сложная ситуация такого же характера очень давно обсуждалась в нашем журнале (см. «Квант», 1971, № 6, 4-я с. обложки). Это так называемая «Игра Эскотта» (см. рис. 2, а). Задача заключается в перемещении блоков по одному в прямоугольнике до тех пор, пока блоки 1 и 2 не поменяются местами с блоками 7 и 10 так, как показано на рисунке 2, б. (Вращать блоки не разрешается, даже если для этого есть место.) В одной из следующих номеров журнала было помещено решение этой головоломки, содержащее 68 ходов. Школьники: члены Малой Академии Наук Крыма — изготовили головоломку Эскотта, однако никто не заметил публикации ее решения в «Кванте». Несколькими лет никто не мог найти «за доской» решения этой задачи.

^{*)} По греческой мифологии Сизиф был осужден богами закатывать камень на гору, но перед самой вершиной камень каждый раз скатывался вниз.



Это - кресла, которая никак не входит с креслом.

Рисунок № 1.

Это - диван, который никак не входит.

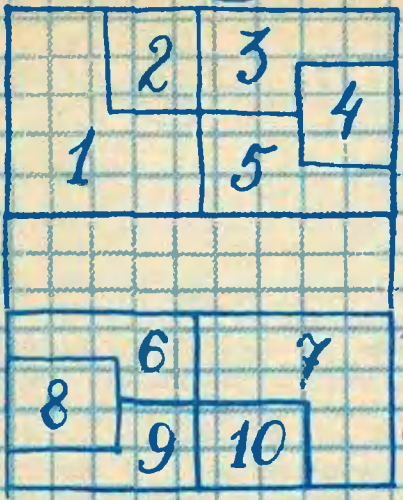
на др. стр.

(А)

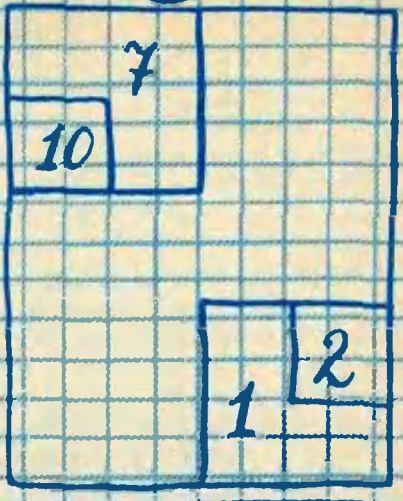
Рисунок №2

(Б)

Это - коридор. А куда -



Буквы
срацать
запрещено!



Хотя «Игра Эскотта» и называется игрой, мы все же привыкли к играм, в которых участвуют по крайней мере два человека. Каждый из вас, конечно же, играл в «крестики-нолики», когда в квадрат 3×3 двое игроков поочередно пишут один игрок — знак X, а другой — знак O. Выигрывает тот, после хода которого образуется три его знака, идущие подряд.

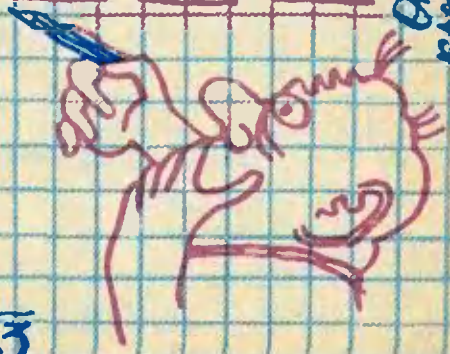
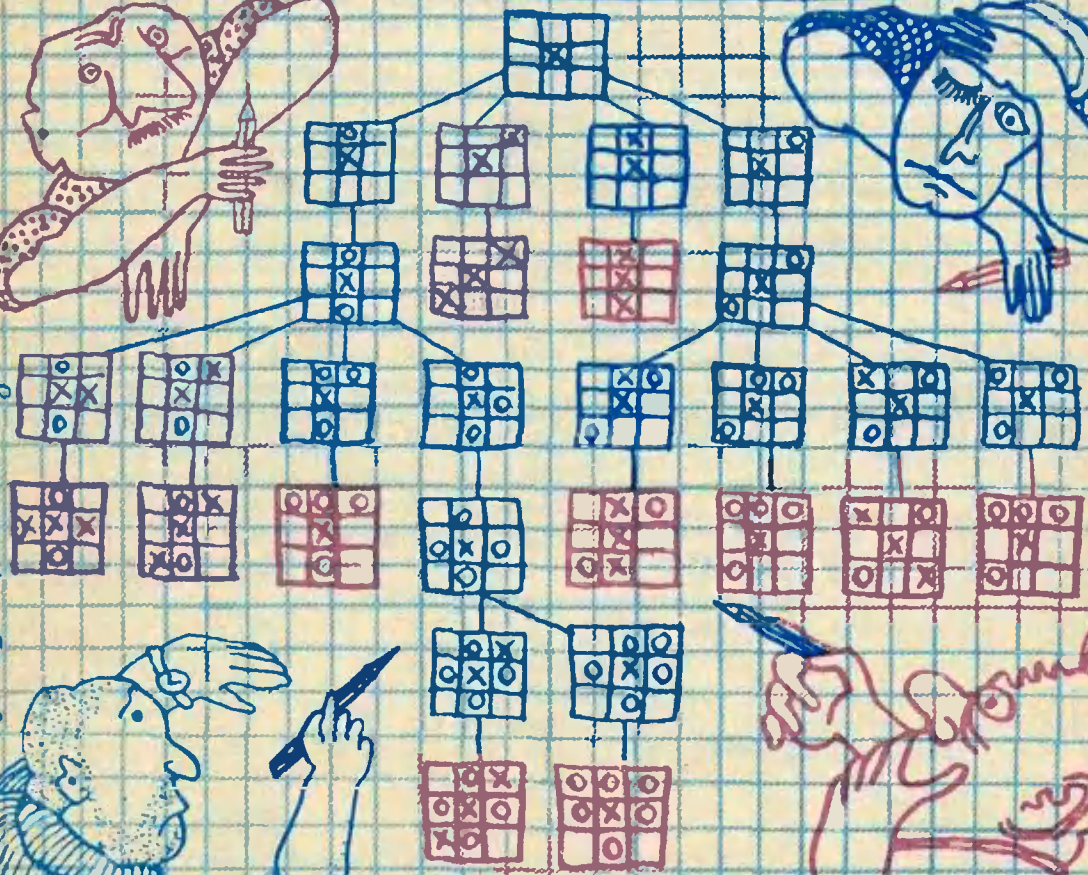
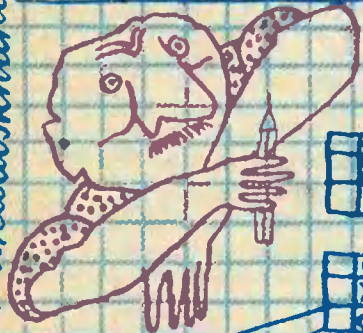
(то есть, начиная игру или играя вторым). Поэтому рассмотрим немного другой вариант «крестиков-ноликов».

Здесь каждый из двух игроков может при любом своем ходе ставить как «крестик», так и «нолик» (конечно же, только один значок). Кто выигрывает в этом случае?

Поиграйте с приятелями в эту игру. Она доставит вам удовольствие. Здесь при правильной игре выигрывает начинающий. Как? Сначала он ставит какой-нибудь значок в центр (скажем, «крестика»). Затем — взгляните на рисунок 3 и вы увидите, как должен иг-

Я думаю, вы настолько хорошо знакомы с этой игрой, что можете сыграть вничью с любым противником, играя как «крестиками», так и «ноликами».

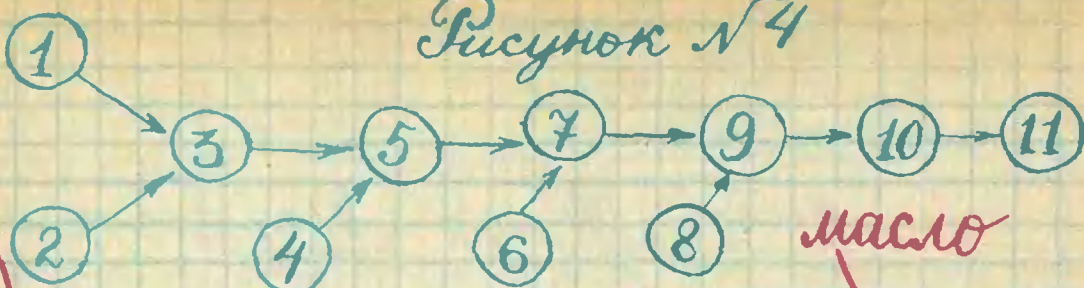
А это - настольные-математические.



Они играют в «крестики-нолики».

Рисунок №3

Рисунок №4



Картофельное пюре

масло

рат первый игрок, чтобы выиграть при любых ответах второго. (Мы немного сократили рисунок, убрав позиции, которые отличаются от приведенных на рисунке поворотом доски или симметрией.) Теперь вы можете выиграть у любого противника, если ходите первым. Математики говорят, что задан алгоритм решения.

Алгоритмы окружают нас повсюду. Раскроем поваренную книгу. Здесь каждый рецепт есть перечисление последовательности действий (алгоритм), которые нужно совершить, чтобы приготовить то или иное блюдо. Вот, например, рецепт картофельного пирожного.

1. Картофель испечь (а не отварить), чтобы пюре было совершенно густое.
 2. Расплавить сливочное масло.
 3. Тщательно растереть с горячим сливочным маслом картофельное пюре.
 4. Взбить 4 яйца.
 5. Добавлять их по одному в пюре, не переставая растирать.
 6. Отдельно растереть 4 желтка с сахаром до бела.
 7. Соединить их с картофельной массой.
 8. Оставшиеся белки взбить в твердую пену.
 9. Соединить их с картофельно-яичной смесью, стараясь взбить пышнее.
 10. Добавить пекарский порошок.
 11. Запечь на огнеупорном блюде в духовке.
- На 10 крупных картофелин 300 г сливочного масла, 8 яиц, 3 столовых ложки сахара, 0,5 чайной ложки пекарского порошка.

Рисунок этого рецепта удобно изобразить в виде схемы (см. рис. 4). Здесь отчетливо видно, что операции 2, 4, 6 и 8 могут быть выполнены независимо от других. Можно сэкономить время приготовления этого блюда, ес-

ли выполнить эти операции, пока нечетается картофель.

Подобные рисунки последовательности проведения отдельных операций получили широкое распространение во многих областях жизни, особенно в строительстве. Там они называются сетевыми графиками. Использование сетевых графиков позволяет сокращать время строительства, указывать точное время проведения каждой строительной операции, проводить расчеты потребности в машинах, людях, материалах.

Расчеты сейчас выполняют электронно-вычислительные машины (ЭВМ) по заранее намеченной программе — алгоритму; эти действия и здесь удобно изображать графически в виде кружочков и стрелочек. Такие рисунки называются «блок-схемами».

Рассмотрим последовательность действий при решении квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$.

1. Вычислим $A = \frac{b}{2a}$.
2. Вычислим $B = ac$.
3. Вычислим $C = 4B$.
4. Вычислим $D = A^2 - C$.
5. Вычислим $E = \sqrt{D}$.
6. Вычислим $F = -b + E$.
7. Вычислим $G = -b - E$.
8. Вычислим $H = 2a$.
9. Вычислим $x_1 = F/H$.
10. Вычислим $x_2 = G/H$.
11. Печатаем x_1, x_2 .

Блок-схема этого алгоритма представлена на рисунке 5.

На большинстве современных ЭВМ операции проводятся последовательно: 1-я, 2-я и т. д. Но уже есть ЭВМ, которые могут одновременно совершать несколько операций. И таким образом ускорять работу.

Пекарский порошок на картинке не изображен.

А это соевая мука и есть какой-то порошок.

* Пекарский порошок состоит из смеси соды, углекислого аммония и виннокаменной соли. Его можно заменить смесью соды и лимонной кислоты в равных частях.

сахар

картонка

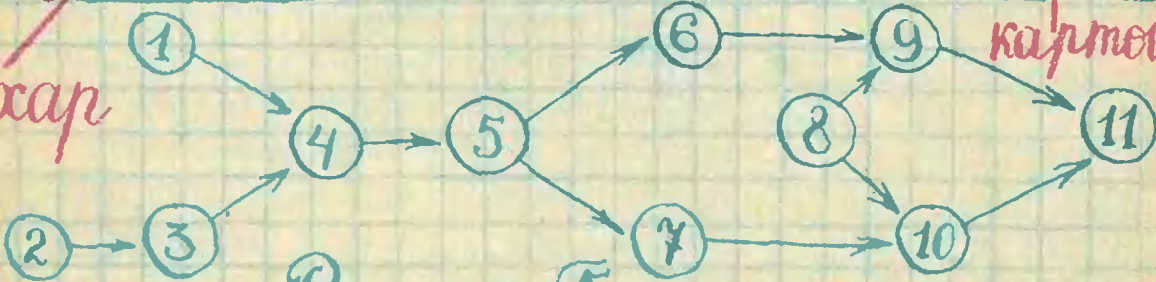


Рисунок №5

Задачник «Кванта»

Задачи

М976—М980; Ф988—Ф992

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач из этого номера можно отправлять не позднее 15 июня 1986 года по адресу: 103006 Москва К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант». В графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» № 4 — 86» и номера задач, решения которых вы посылаете, например, «М976, М977 или «Ф988». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки решений). Условие каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «...явная задача по математике»). В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором вы учитесь. Фамилию и имя пишите печатными буквами.

М976. Из вершины A квадрата $ABCD$ проведены два луча, образующие между собой угол 45° . Один пересекает сторону BC в точке E , диагональ BD — в точке P , другой — сторону CD в точке F , диагональ BD — в точке O . Докажите, что площадь треугольника AEF вдвое больше площади треугольника APC .

Э. Г. Готман

М977. Можно ли с помощью операций сложения, вычитания и умножения из многочленов $f(x)$ и $g(x)$ получить x , если а) $f(x)=x^2+x$, $g(x)=x^2+2$; б) $f(x)=x^2+x$, $g(x)=x^2-2$; в) $f(x)=2x^2+x$, $g(x)=2x$; г) $f(x)=2x^2+x$, $g(x)=x^2$.

С. И. Кублановский

М978. Можно ли в квадрате со стороной 1 расположить два правильных треугольника со сторонами больше $\sqrt{2/3}$, не налегающих друг на друга?

Е. А. Карлов, И. К. Димитров
(Болгария)

М979. Пусть k и n — натуральные числа, $k \leq n$. Назовем набор k положительных чисел a_1, a_2, \dots, a_k меньших 1 *исключительным*, если для любого разбиения $n = n_1 + n_2 + \dots + n_k$ числа n на неотрицательные целые слагаемые хотя бы одно из чисел $a_i n_i$ — целое ($i=1, 2, \dots, k$).

а) Для каких k и n существуют исключительные наборы?

б) Каковы эти наборы?

Е. А. Горин

М980. Внутри выпуклого а) многоугольника, б) многогранника с вершинами A_1, A_2, \dots, A_n взята точка O . Докажите, что среди $n(n-1)/2$ углов $A_i O A_k$ ($i, k=1, 2, \dots, n$) не менее, чем $n-1$ имеют величину от 90° до 180° .

В. Г. Болтянский

Ф988. Хоккеист скользит по льду на одном коньке. Известно, что лед тает под коньком на глубину $h=0,03$ мм. Ширина конька $d=2$ мм. Найти силу трения между коньком и льдом. Удельная теплота плавления льда $\lambda=3,3 \cdot 10^5$ Дж/кг, плотность льда $\rho=0,9$ г/см³. Считать теплопроводность льда малой.

М. Г. Гаврилов

(Окончание см. на с. 34)



Видя, что все математические науки — хотя предметы их и различны — согласуются между собой в том, что рассматривают не что иное, как разные отношения и пропорции, я думал, что наилучше будет, если я стану рассматривать только эти отношения вообще..., чтобы потом приложить их ко всем другим предметам, к которым они подойдут.

Рене Декарт



Французский математик и естествоиспытатель Рене Декарт (1596—1650) — один из основоположников европейской науки и философии нового времени. Декарту принадлежит честь создания аналитической геометрии, он — один из творцов современной алгебры, механики, оптики. Декарт первым в новое время поставил космогоническую проблему.

В лице Декарта органически соединился гений великого ученого и глубокого философа. Будучи создателем рационалистического метода в науке, Рене Декарт подчеркивал, что «подлинную науку можно найти в себе самом или в великой книге мира».

О круге

В древней Греции круг и окружность считались венцом совершенства. Действительно, в каждой своей точке окружность «устроена» одинаковым образом, что позволяет ей двигаться «по себе». На плоскости этим свойством обладает еще лишь прямая. Одно из интереснейших свойств круга состоит в том, что круг при заданном периметре ограничивает максимальную площадь.

В русском языке слово «круглый» также означает высокую степень чего-либо: «круглый отличник», «круглый сирота» и даже «круглый дурак».

С кругом связана и классическая задача, ставшая символом неразрешимой проблемы. Это — задача *квадратуры круга*, то есть построения с помощью циркуля и линейки квадрата, равновеликого данному кругу. Задачу эту не могли решить на протяжении более двух тысячелетий. Лишь в XIX веке усилиями нескольких выдающихся математиков — Ламберта, Лиувилля, Эрмита и Вейерштрасса — была установлена невоз-

можность построения при помощи циркуля и линейки квадрата, равновеликого данному кругу, и выяснена природа числа π .

Циркуль и линейка — это классические инструменты геометров с древнейших времен до наших дней. Ими можно проводить лишь прямые и окружности. Однако сколько интересных задач связано именно с циркулем и линейкой! В каждой из них выявляется то или иное свойство круга по отношению к другим кругам, прямым и многоугольникам.

Приведем три теоремы, доказанные в разное время, но очень похожие по формулировке.

Первая теорема носит название «*поризм Штейнера*» в честь швейцарского геометра Якоба Штейнера (1796—1863) (поризмами называют утверждения, промежуточные между задачами на построение и теоремами):

Пусть на плоскости даны две непересекающиеся окружности. Построим еще одну окружность так, чтобы она касалась двух данных. Назовем ее первой. Затем нарисуем еще одну окружность, касающуюся двух данных и первой окружности. Ее назо-

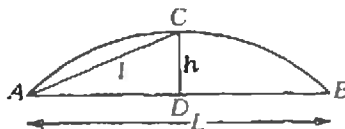
Полезные формулы

Не очень трудно найти длину дуги сегмента и его площадь, если известен радиус окружности и угол, стягиваемый дугой сегмента. Но как быть, если эти величины неизвестны,

а из инструментов у нас лишь одна линейка? В этом случае удобно использовать следующие приближенные формулы:

$$p \approx \frac{8l-L}{3}, S \approx \frac{2}{3}hl.$$

Здесь p — длина дуги сегмента, S — его площадь, L — длина хорды, h — высота сегмента, l — длина отрезка AC (см. рисунок). (При углах, стягиваемых дугой сегмента, меньших 60° , эти формулы дают ошибку, не превышающую 1,5%.)



вом второй. Третья окружность будет касаться двух данных и второй окружности и т. д. Может случиться, что на некотором шаге очередная окружность коснется первой окружности, как на рисунке 1. Утверждение Штейнера состоит в том, что если для некоторой начальной (первой) окружности получится такая цепочка, то подобная цепочка образуется при любом другом выборе первой окружности. При этом и количество окружностей в цепочке не будет зависеть от того, какую окружность мы взяли в качестве первой.

Вторая теорема принадлежит французскому математику и механику Ж. Виктору Понселе (1788—1867) и утверждает следующее:

Пусть снова имеются две непересекающиеся окруж-

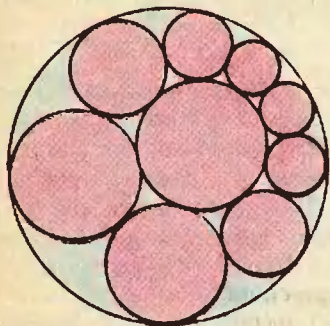


Рис. 1.

ности. Будем считать, что одна из них находится внутри другой. Выберем на внешней окружности некоторую точку и проведем из нее касательную к внутренней окружности. Из новой точки пересечения этой касательной с внешней окружностью проведем еще одну касательную к внутренней окружности и т. д. (рис. 2). И вновь: если на некотором шаге мы попадем в начальную точку, то такой

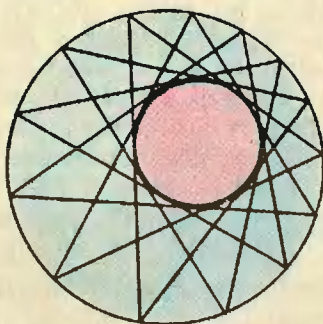


Рис. 2.

процесс «замкнется» при выборе в качестве начальной точки любой другой точки внешней окружности.

Третья теорема была доказана совсем недавно американскими математиками В. Л. Блеком, Г. К. Хаулендом и Б. Хаулендом и носит название «теоремы о зигзагах»:

Вновь возьмем некото-

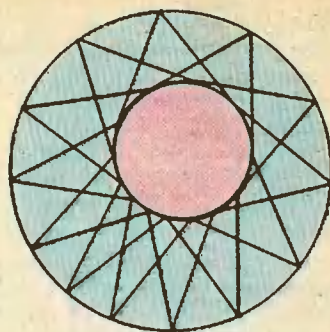


Рис. 3.

рую точку на внешней окружности и, поставив ножку циркуля в выбранную точку, сделаем на внутренней окружности засечку. Поставим ножку циркуля в получившуюся точку внутренней окружности и тем же раствором циркуля сделаем засечку на внешней окружности. Из полученной точки снова «шагаем» тем же радиусом на внутреннюю окружность, затем снова на внешнюю и т. д. Соединив последовательно получаемые точки, мы образуем зигзагообразную ломаную (рис. 3). И вновь оказывается, что если эта ломаная на некотором шаге замкнется, то она замкнется при любом другом выборе начальной точки (раствор циркуля оставляем прежним). Сохранится и число отрезков ломаной.

А. П.

Задачи и головоломки

1. Возьмем прямоугольный листок бумаги, который можно накрыть кругом радиуса 1. Перегнем листок (рис. 1). Можно

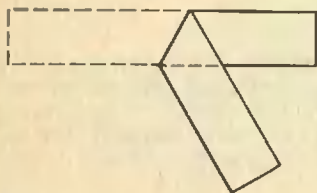


Рис. 1.

ли теперь накрыть его тем же кругом?

В. В. Произволов

2. К двум окружностям проведена внешняя касательная AB и две внутренние касательные, пересе-

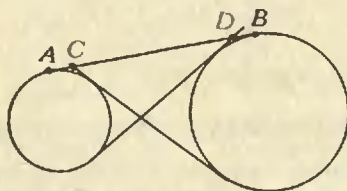


Рис. 2.

кающие отрезок AB в точках C и D (рис. 2). Докажите, что $AC = DB$.

Г. А. Гальперин

3. Решите числовой ребус:

радиус
+ дуга

фигуры

Н. К. Антонович

(Начало см. на с. 31)

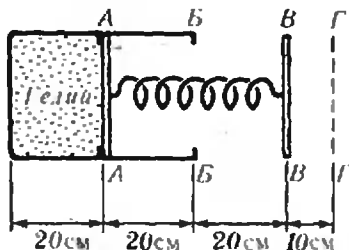


Рис. 1.

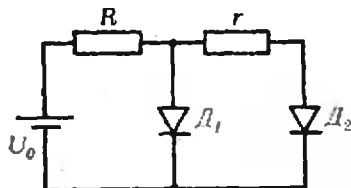


Рис. 2.

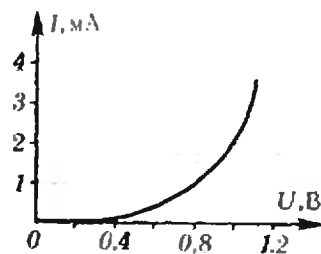


Рис. 3.

Ф989. Модель тележки на гусеничном ходу поставили на наклонную плоскость с углом наклона $\alpha=30^\circ$ и отпустили. Найти ускорение модели. Длина модели $l=50$ см, высота $h=2$ см. Гусеницы сделаны из резины, их масса составляет 80 % всей массы модели. Трение в механизме модели пренебрежимо мало.

А. И. Буздин

Ф990. Тепловой двигатель представляет собой наполненный газом цилиндр с поршнем, движение которого ограничено упорами AA и BB (рис. 1). Газ медленно нагревают, пока поршень не коснется упоров BB, после чего основание пружины смещают из положения BB в положение GG. Затем сосуд медленно охлаждают до тех пор, пока поршень не коснется упоров AA. Тогда основание пружины смещают назад до BB, цилиндр снова нагревают, и т. д. Найти КПД этого двигателя. Цилиндр заполнен гелием; площадь поршня $S=10$ см²; жесткость пружины $k=10$ Н/м, длина ее в нерастянутом состоянии $l_0=60$ см. Внешнее давление принять равным нулю.

А. Р. Зильберман

Ф991. В схеме, приведенной на рисунке 2, $U_0=2,4$ В, $R=600$ Ом, $r=200$ Ом, диоды D_1 и D_2 имеют одинаковые вольтамперные характеристики (рис. 3). Найти ток через диод D_2 .

Р. З. Александров

Ф992. При съемке кадра из фильма «Гулливер в стране лилипутов» актера, играющего роль Гулливера, поместили на расстоянии 4 м от кинокамеры с короткофокусным объективом, а актера, исполняющего роль лилипута, — на расстоянии 40 м. На какое расстояние нужно навести объектив камеры, чтобы изображения обоих героев на киноленте были одинаково четкими?

Почему при такой съемке используется короткофокусный объектив? Оцените фокусное расстояние такого объектива, если известно, что обычная (некомбинированная) съемка людей с расстояния 5 м проводится объективом с фокусным расстоянием 50 см и глубина резкости при этом 0,5 м.

Е. Н. Юносов. И. В. Яминский

Problems

M976—M980; P988—P992

We have been publishing Kvant's contest problems every month from the very first issue of our magazine. The problems are nonstandard ones, but their solution requires no information outside the

M976. Two rays, forming an angle of 45° , are drawn from the vertex A of the square ABCD. One intersects side BC at the point E and the diagonal BD at the point P, the other intersects side CD at the point F and the diagonal BD at the point O. Prove that the area of triangle AEF is twice that of APO.

E. G. Gotman

scope of the USSR secondary school syllabus. The more difficult problems are marked with a star (*). After the statement of the problem, we usually indicate who proposed it to us. It goes without saying that not all these problems are first publications. The solutions of problems from this issue (in Russian or in English) may be posted no later than June 15th, 1986 to the following address: USSR, Moscow, 103006, Москва К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант». Please send the solutions of physics and mathematics problems, as well as problems from different issues, under separate cover; on the envelope write the words: «KVANTS PROBLEMS» and the numbers of all the solved problems; in your letter enclose an unstamped self-addressed envelope — we shall use it to send you the correction results. At the end of the academic year we sum up the results of the Kvant problem contest. If you have an original problem to propose for publication, please send it to us under separate cover, in two copies (in Russian or in English), including the solution. On the envelope write NEW PROBLEM IN PHYSICS (or MATHEMATICS).

M977. Is it possible to obtain the polynomial x from the polynomials $f(x)$ and $g(x)$ by means of additions, subtractions and multiplications if a) $f(x)=x^2+x$, $g(x)=x^2+2$; b) $f(x)=x^2+x$, $g(x)=x^2-2$; c) $f(x)=2x^2+x$, $g(x)=2x$; d) $f(x)=2x^3+x$, $g(x)=x^3$?

S. I. Kubtanovski

M978. Can one find two non-overlapping equilateral triangles of sides greater than $\sqrt{2/3}$ in a square of side 1?

E. A. Karlov, I. K. Dimitrov (Bulgaria)

M979. Let k and n be positive integers, $k < n$. Any k -tuple of positive numbers a_1, a_2, \dots, a_k less than 1 will be called *exceptional* if for any decomposition of n into k summands $n = n_1 + n_2 + \dots + n_k$, where all the n_i are non-negative integers, at least one of the numbers $a_i \cdot n_i$ is an integer ($i=1, 2, \dots, k$).
a) For what k and n do exceptional k -tuples exist?
b) Find them.

E. A. Gorin

M980. The point O is chosen inside a) a polygon, b) a polyhedron with vertices A_1, A_2, \dots, A_n . Prove that among the $n(n-1)/2$ angles $A_n O A_k$ ($n, k=1, 2, \dots, n$) no less than $n-1$ are between 90° and 180° .

V. G. Boltjanski

P988. An ice hockey player slides on one skate so that the ice under the skate melts to the depth $h=0.03$ mm. The width of the skate is $d=2$ mm. Find the force of friction between skate and ice if the specific heat of ice melting is $\lambda=3.3 \cdot 10^5$ J/kg, the density of ice $\rho=0.9$ g/cm³. Heat conductivity of ice is negligible.

M. G. Gavrilov

P989. A track vehicle model is placed on an inclined plane forming an angle of $\alpha=30^\circ$ to the horizon and then released. Find the acceleration of the vehicle. Its length is $l=50$ cm, its height $h=2$ cm. The tracks are made of rubber, their mass is 80% of the vehicle's total mass. Inner friction in the vehicle is negligible.

A. I. Buzdin

P990. A heat engine is constituted by a cylinder with piston whose motion is limited by the blocks AA and BB (see figure Puc. 1). The cylinder contains gas. The gas is slowly heated until the piston reaches the blocks BB and then the base of the piston is moved from the position BB to the position $l'l'$. Then the system is slowly cooled until the piston moves back and touches the blocks AA . At this point the base of the spring is moved back to BB , then the cylinder is heated again, and so on. Find the efficiency of this engine. The area of the piston is $s=10$ cm², the elasticity of the spring is $k=10$ N/m. The length of the spring in unstretched state is $l_0=60$ cm. The exterior pressure may be assumed equal to zero.

A. R. Zilberman

P991. In the circuit shown on figure Puc. 2, the diodes have identical voltampere characteristics (Puc. 3). Find the current through the diode D_2 if $U_0=2.4$ V; $R=600$ Ohms; $r=200$ Ohms.

R. Z. Alexandrov

P992. While filming one of the scenes of the movie "Gulliver in the country of lilliputs", the movie actor playing the role of Gulliver was placed 4 m from the short focal distance camera lens, while the actor playing one of the lilliputs was standing 40 m from the lens. To what distance should the lens be focused to ensure that both actors come out equally clear on the film?

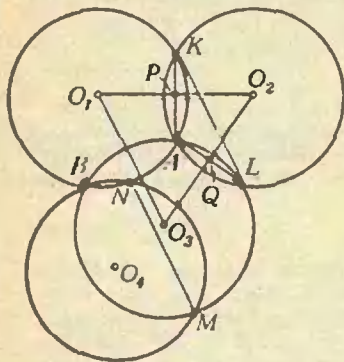
Why is a camera with short focal distance used for such filming? Estimate the focal distance of the lens if it is known that ordinary filming of people from a distance of 5 m is carried out with lenses of focal distance 50 cm, yielding a depth of clarity of 0,5 m.

E. N. Yunosov, I. V. Yaminski

Решения задач

M956—M960; Ф968—Ф972

M956. На плоскости проведе- ны четыре окружности одина- кового радиуса так, что три из них проходят через одну точку A , и три — через точку B . Докажите, что четыре точки их попарного пересече- ния, отличные от A и B , — вершины параллелограмма.



M957. Докажите, что из 1985 различных натуральных чисел, все простые делители которых содержатся среди первых 9 простых чисел 2, 3, ..., 23, можно выбрать четыре числа, произведение которых — чет- вертая степень целого числа.

Приведем одно из многих решений задачи. Обозначим центры окружностей через O_1, O_2, O_3, O_4 , точки их попарного пересечения — через K, L, M, N (см. рисунок). Поскольку окруж- ности равны, точка P пересечения общей хорды AK окружностей O_1 и O_2 с их линией центров O_1O_2 делит оба отрезка AK и O_1O_2 пополам. Аналогично, отрезки O_3O_2 и AL имеют общую се- редину Q . Следовательно, отрезок PQ является средней линией двух треугольников — $O_1O_2O_3$ и AKL , то есть $\overrightarrow{O_1O_3} = 2\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{KL}$. Точно также доказывается, что $\overrightarrow{O_1O_3} = \overrightarrow{NM}$, а из равенства $\overrightarrow{KL} = \overrightarrow{O_1O_3} = \overrightarrow{NM}$ следует, что $KLMN$ — паралле- лограмм.

Докажите самостоятельно, что A и B — точки пере- сечения высот треугольников BKL и AMN : этот факт можно использовать для другого решения задачи (ср. с заключи- тельным замечанием в решении задачи M951 в прошлом номере «Кванта»).

В. И. Дубровский

Докажем, что из данных чисел можно выбрать достаточно много таких пар (a, b) , что произведение ab — квадрат целого числа; точнее: из N чисел (с 9 простыми множителями) можно выбрать не менее $(N-2^9)/2$ таких пар. В нашей задаче $N=1985$, так что можно выделить не менее $(1985-512)/2$, то есть по крайней мере 737 пар (a, b) . Затем к $N=737$ целым числам \sqrt{ab} можно применить еще раз то же рассуждение и по- лучить такую пару (\sqrt{ab}, \sqrt{cd}) — даже $(737 - 512)/2 + 1/2 = 113$ таких пар, — что произведение $\sqrt{ab} \cdot \sqrt{cd}$ квадрат целого числа, то есть $abcd$ — четвертая степень целого числа.

Осталось доказать сформулированный факт. По основной теореме арифметики каждое натураль- ное число однозначно представляется в виде про- изведения простых множителей. Произведение ab двух целых чисел

$$a = 2^{\alpha_1} 3^{\alpha_2} \dots 23^{\alpha_9} \quad \text{и} \quad b = 2^{\beta_1} 3^{\beta_2} \dots 23^{\beta_9}$$

будет точным квадратом в том и только том случае, если показатели α_i и β_i имеют одинаковую четность (для каждого i от 1 до 9); в этом случае наборы $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_9)$ и $(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_9)$ показателей мы будем называть сравнимыми. Будем из N наборов показателей, соответствующих N данным числам (с множителями 2, 3, ..., 23), выделять одну за другой пары сравнимых наборов, до тех пор, пока это возможно. Наборов без пары останется не более 2^9 , поскольку существует всего 2^9 попарно несрав- нимых наборов показателей (на каждом из 9 мест может стоять либо четное, либо нечетное число — всего 2^9 вариантов).

Эта задача, предложенная Монголией на последней международной олимпиаде, — частный случай следующей, видимо, очень трудной проблемы. Пусть заданы натураль-

ные числа a и m . Для какого N можно утверждать, что из N любых наборов (a_1, a_2, \dots, a_d) , где a_i — целые числа, можно выбрать m наборов, сумма i -х координат которых делится на m (для каждого $i=1, 2, \dots, d$)? Естественно, что N должно быть больше $(m-1)/2^d$ (по крайней мере, уменьшить эту оценку нельзя: достаточно взять все наборы из нулей и единиц, каждый по $(m-1)$ раз). Интересно было бы доказать или опровергнуть гипотезу, что наименьшее $N=N(d, m)$, для которого верно сформулированное выше утверждение, равно $(m-1)2^d+1$, или хотя бы получить оценки для $N(d, m)$. Для $d=1$ — то есть для целых чисел a — эта гипотеза доказана: $N(1, m)=2m-1$ (см. «Квант», 1971, № 7, с. 30 и № 8, с. 43). Она верна также для $m=2^k$: из факта, доказанного в решении задачи M957, эквивалентного неравенству $N(d, 2m) < 2N(d, m)+2^d-1$, и очевидного неравенства $N(d, 2) < 2^d+1$ вытекает, что

$$N(d, 4) < 2^d+2^{d+1}+1, \quad N(d, 8) < 2^d+2^{d+1}+2^{d+2}+1, \dots \\ N(d, 2^k) < 2^d+2^{d+1}+\dots+2^{d+k-1}+1=(2^k-1)2^d+1;$$

таким образом, $N(d, 2^k)=(2^k-1)2^d+1$.

Не менее интересна (довольно близкая) проблема, предложенная нашим читателем Д. Флейшманом: в той же ситуации требуется выбрать из N наборов несколько (не обязательно ровно m), сумма которых «делится на m ».

Н. Б. Васильев, Д. Б. Фукс



Будем называть два многочлена $F(x)$ и $G(x)$ с целыми коэффициентами эквивалентными, если все коэффициенты их разности $F(x)-G(x)$ четны, и записывать эту эквивалентность так: $F(x) \equiv G(x)$. Например, $(1+x)^2 \equiv 1+x^2$ (см. также формулы (1) — (4) на полях). Ясно, что если $F_1 \equiv G_1$, $F_2 \equiv G_2$, то $F_1+G_1 \equiv F_2+G_2$, $F_1G_1 \equiv F_2G_2$ ($F_1F_2-G_1G_2 \equiv F_1(F_2-G_2)+G_2(F_1-G_1)$) и $F_1^m \equiv G_1^m$ для любого натурального m . Число нечетных коэффициентов многочлена $F(x)$ будем обозначать через $W(F(x))$ или $W(F)$ и называть весом многочлена $F(x)$; положим $W((1+x)^i) = w(i)$. Многочлен $(1+x)^{i_1}+(1+x)^{i_2}+\dots+(1+x)^{i_n}$ в условии задачи обозначим коротко через $P(x)$. Требуемое неравенство $w(i_s) < W(P)$ можно доказать методом математической индукции. Вот одно из таких доказательств — индукцией по i_n (предложенное авторами из Нидерландов, представившими эту задачу на международную олимпиаду).

Из формулы (1) на полях следует, что для любого многочлена с целыми коэффициентами степени меньше $q=2^k$

$$W(F(x)(1+x)^q) = 2W(F(x)). \quad (*)$$

При $i_n=0$ и $i_n=1$ нужное неравенство $W(P) = w(i_1)$ очевидно. Предположим, что оно верно для $i_n < 2^k$ ($k \geq 1$) и докажем его для $2^k < i_n < 2^{k+1}$. Положим $q=2^k$ и рассмотрим два случая.

Если $i_1 > q$, то, полагая $F(x) = (1+x)^{i_1-q} + \dots + (1+x)^{i_n-q}$, по формуле (*) и предположению индукции получим:

$$W(P) = 2W(F) \geq 2w(i_1-q) = w(i_1).$$

Если $i_1 < q$, запишем $P(x)$ в виде

$$P_1(x) + (1+x)^q P_2(x) \equiv P_1(x) + P_2(x) + x^q P_2(x),$$

где $P_1(x)$ — сумма многочленов $(1+x)^i$ с показателями $i_s < q$. Тогда каждый нечетный коэффициент многочлена P_1 , который «убивается» не-

M958*. Пусть $0 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_n$ — целые числа. Докажите, что количество нечетных коэффициентов у многочлена

$(1+x)^{i_1} + (1+x)^{i_2} + \dots + (1+x)^{i_n}$ не меньше, чем у многочлена $(1+x)^{i_1}$.

$$(1+x)^2 \equiv 1+x^2, \quad (1)$$

$$(1+x)^4 \equiv (1+x^2)^2, \quad (2)$$

$$(1+x)^{2j+1} \equiv (1+x^j)^2 + x(1+x^j)^j, \quad (3)$$

$$(1+x)^{2j} + (1+x)^{2j+1} \equiv x(1+x^j)^j, \quad (4)$$

формула (4) используется в случае $i_n=2j_s$, $i_{n+1}=i_s+1=2j_s+1$ ($s=1, 2, \dots, m$).

n	k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
0	1												
1	1	1											
2	1	0	1										
3	1	1	1	1									
4	1	0	0	0	1								
5	1	1	0	0	1	1							
6	1	0	1	0	1	0	1						
7	1	1	1	1	1	1	1						
8	1	0	0	0	0	0	0	1					
9	1	1	0	0	0	0	0	1	1				
10	1	0	1	0	0	0	0	1	0	1			
11	1	1	1	1	0	0	0	1	1	1	1		

четным коэффициентом P_2 при той же степени x , возникает вновь в члене степени на q большей многочлена $x^q P_2(x)$, поэтому $w(i_1) < W(P_1) < W(P)$.

Приведем еще одно рассуждение — индукцией по i_1 . Для $i_1=0$ наше утверждение очевидно ($w(0)=1$).

Докажем, что если оно верно для некоторого $i_1=j_1$, то оно также верно для $i_1=2j_1$ и $i_1=2j_1+1$. Для этого, пользуясь предположением индукции и формулами (2), (3) и (4) на полях, учтем отдельно коэффициенты при четных и нечетных степенях x в многочленах $(1+x)^{i_1}$ и $P(x)$. Положив, в зависимости от четности i_2 , $i_2=2j_2$ или $i_2=2j_2+1$ и применяя формулы на полях, запишем многочлен $P(x)$ в виде $F_1(x^2) + xF_2(x^2)$.

Если $i_1=2j_1$, то, согласно (2), $w(i_1)=w(j_1)$. При этом, если $i_2 > i_1+1$, то запись $P(x)$ начинается с $(1+x^2)^{i_2}$ и вклад коэффициентов при четных степенях x в вес $P(x)$ (то есть вес $F_1(x)$) уже не меньше $w(j_1)$. Если же $i_2=i_1+1$, то, используя (4), мы начнем запись $P(x)$ с $x(1+x^2)^{i_2}$ и по предположению индукции вклад $W(F_2)$ коэффициентов при нечетных степенях x в вес $P(x)$ не меньше $w(j_1)$.

Если $i_1=2j_1+1$, то, согласно (3), $w(i_1)=2w(j_1)$ и вклад в вес $P(x)$ и четных, и нечетных степеней x не меньше $w(j_1)$, так что $W(P) > 2w(j_1) = w(i_1)$.

Наконец, наметим наиболее поучительное решение, использующее общее правило описания всех нечетных коэффициентов многочлена $(1+x)^i$. Представим i в виде

$$i = 2^{m_1} + 2^{m_2} + \dots + 2^{m_r}, \quad m_1 < m_2 < \dots < m_r; \quad (*)$$

такое представление всегда существует и единственно (m_1, \dots, m_r — это номера разрядов двоичной записи числа i , в которых стоят 1). Тогда по формуле (1) на полях $(1+x)^i = (1+x^{2^{m_1}}) \dots (1+x^{2^{m_r}})$, где $q_s = 2^{m_s}$. Поэтому коэффициент C_i^k многочлена $(1+x)^i$ при x^k нечетен тогда и только тогда, когда k равно некоторой подсумме суммы (*). Обозначая через $M(i)$ множество показателей $\{m_1, \dots, m_r\}$ в двоичном разложении i , это условие можно записать в виде $M(k) \subset M(i)$. Следовательно, коэффициент при x^k многочлена $P(x)$ нечетен тогда и только тогда, когда множество $B = M(k)$ содержится в нечетном числе множеств $A_s = M(i_s)$, $s = 1, 2, \dots, n$; такие множества B будем называть нечетными. Итак, нужно доказать такой чисто комбинаторный факт: число всех подмножеств множества A_1 не меньше числа всех нечетных множеств. Для этого достаточно сопоставить всем $C \subset A_1$ различные нечетные подмножества $F(C)$.

Если C само нечетно, положим $F(C) = C$. В противном случае добавим к C множество, выбранное следующим образом. Рассмотрим все A_s , содержащие C ($s > 2$) — их число нечетно, — и множества D_s , состоящие из всех элементов A_s , не входящих в A_1 . Среди этих множеств могут встретиться одинаковые; оставим лишь те, которые представлены нечетным числом копий, из них выберем некоторое наибольшее (не содержащееся в других) D_h и положим $F(C) = C \cup D_h$. Легко видеть, что все множества $F(C)$ нечетны и различны ($F(C) \cap A_1 = C$).

Если выписать коэффициенты $(1+x)^i$, заменяя четные на 0, а нечетные — на 1, и составить из таких строчек таблицу, получится «двоичный треугольник Паскаля», показанный на полях. Попробуйте разобраться в его структуре и проследить с его помощью за последним решением.

Н. Б. Васильев, Д. Б. Фукс

М959*. В стране между некоторыми парами городов установлено авиационное сообщение. Докажите, что можно закрыть не более, чем $1/(k-1)$ -ю часть авиалиний таким образом, что среди любых k городов найдутся два, не соединенные между собой авиалинией, если

а), б) Рассмотрим сразу общий случай. Разобьем все города каким-то образом на $k-1$ групп. Авиалинии, соединяющие два города из одной группы, назовем *внутренними* (для данного разбиения). Выберем из всех разбиений то, для которого число $N_{\text{вн}}$ внутренних авиалиний минимально, и докажем, что общее число N авиалиний не меньше $(k-1)N_{\text{вн}}$.

- а) $k=3$;
 б) k — любое натуральное число, $k > 1$.

Для этого заметим, что число n внутренних авиалиний (для выбранного «минимального» разбиения), выходящих из любого города A , не больше числа n , авиалиний, ведущих из этого города в любую группу городов G_i ($i=1, \dots, k-1$): если бы оказалось, что $n > n_i$, мы перевели бы город A в группу G_i и тем самым уменьшили бы число внутренних авиалиний на $n - n_i$. Следовательно, общее число авиалиний, выходящих из города A , не меньше $(k-1)n$. Суммируя такие неравенства по всем городам и учитывая, что каждая авиалиния соединяет два города, получим, что $2N \geq 2(k-1)N$. Закроем теперь все внутренние авиалинии нашего «минимального» разбиения. Тогда из любых k городов хотя бы два попадут в одну группу и не будут соединены между собой, причем закрыты будут не более $N/(k-1)$ авиалиний.

А. А. Разборов

М960. Если разность между кубами двух последовательных натуральных чисел — квадрат некоторого натурального числа n , то число n представляется в виде суммы квадратов двух последовательных натуральных чисел.

- а) Докажите это утверждение.
 б) Вот один пример таких чисел: $8^3 - 7^3 = (2^2 + 3^2)^2$; приведите еще хотя бы один пример.
 в) Докажите, что их существует бесконечно много.

а) Пусть $(m+1)^3 - m^3 = n^2$. Раскрывая скобки и умножая обе части равенства на 4, получим, что $3 \cdot 4m^2 + 3 \cdot 4m + 4 = 4n^2$ или

$$3(2m+1)^2 = (2n+1)(2n-1). \quad (1)$$

Поскольку числа $2n+1$ и $2n-1$ взаимно простые, равенство (1) возможно, только когда одно из этих чисел — квадрат натурального, а другое — утроенный квадрат. Но число n нечетно (n^2 — это разность чисел разной четности), поэтому $2n+1$ дает при делении на 4 остаток 3, а квадрат целого числа либо делится на 4, либо дает при делении на 4 остаток 1; следовательно, точным квадратом является $2n-1$; то есть $2n-1 = (2l+1)^2$ или $n = 2l^2 + 2l + 1 = l^2 + (l+1)^2$.

б), в) Полагая в равенстве (1) $2n=a$, $2m+1=b$, перепишем его в виде

$$a^2 - 3b^2 = 1.$$

Очевидно, каждому решению (a, b) этого уравнения с нечетным b (и, следовательно, четным a) отвечает пара (m, n) , удовлетворяющая условию задачи. Покажем, как по одному решению (a, b) можно построить бесконечную последовательность решений. Мы воспользуемся общим методом построения решений так называемого уравнения Пелля $x^2 - dy^2 = 1$, о котором подробно рассказывалось в статье Н. Б. Васильева и В. Л. Гутенмахера «Пары чисел и действия с ними» (Квант, 1985, № 1, с. 20).

Пусть (a_1, b_1) — какое-то решение (2). Определим числа a_k и b_k равенством $(a_1 + b_1\sqrt{3})^k = a_k + b_k\sqrt{3}$. Ясно, что тогда $(a_1 - b_1\sqrt{3})^k = a_k - b_k\sqrt{3}$, поэтому $a_k^2 - 3b_k^2 = (a_1 + b_1\sqrt{3})(a_1 - b_1\sqrt{3})^k = ((a_1 + b_1\sqrt{3})(a_1 - b_1\sqrt{3}))^k = (a_1^2 - 3b_1^2)^k = 1$

Следовательно, пары (a_k, b_k) при всех k также удовлетворяют уравнению (2). При этом, если b_1 нечетно (а a_1 четно), то при нечетном k число b_k представляется в виде $a_1 \cdot A + b_1^k 3^{(k-1)/2}$ и тоже нечетно.

Таким образом, начав, скажем, с $(a_1, b_1) = (2, 1)$ и последовательно вычисляя нечетные степени

$(2 + \sqrt{3})^3 = 26 + 15\sqrt{3}$, $(2 + \sqrt{3})^5 = 362 + 209\sqrt{3}$, ..., мы получим бесконечный набор решений (2): $(a_3, b_3) = (26, 15)$, $(a_5, b_5) = (362, 209)$, ... а из них — решения исходной задачи: $(m, n) = (7, 13)$, $(104, 181)$, ..., которым отвечают соотношения $8^3 - 7^3 = (2^2 + 3^2)^2$ (пример из условия задачи б)), $105^3 - 104^3 = (9^2 + 10^2)^2$ (ответ к задаче б)) и т. д.

А. П. Савин, В. Н. Дубровский

Ф968. На три параллельных оси, соединенных жесткими стержнями, насажены три зацепленных шестеренки с радиусами r_1 , r_2 и r_3 (рис. 1). Оси В и С вращаются вокруг неподвижной оси А с угловой скоростью ω_0 ; при этом размеры треугольника АВС остаются неизменными, а шестеренка радиуса r_1 движется поступательно. С какой угловой скоростью вращается шестеренка радиуса r_1 ?

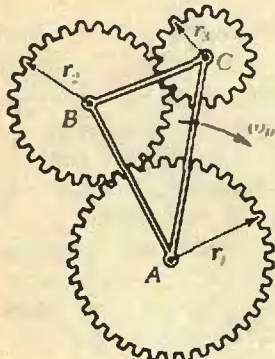


Рис. 1.

На рисунке 2 показано положение системы через время t . За это время точки В и С повернутся на угол $\varphi = \omega_0 t$. Шестеренка радиуса r_3 , согласно условию, движется поступательно. Это значит, что за время t эта шестеренка повернулась как целое вокруг оси А на угол φ . И вокруг собственной оси С — тоже на угол φ . Значит, все дуги, отмеченные на рисунке 2, равны φr_3 , и угловая скорость ω вращения шестеренки радиуса r_1 определяется условием

$$\omega_0 t = \omega t + \varphi \frac{r_1}{r_3}$$

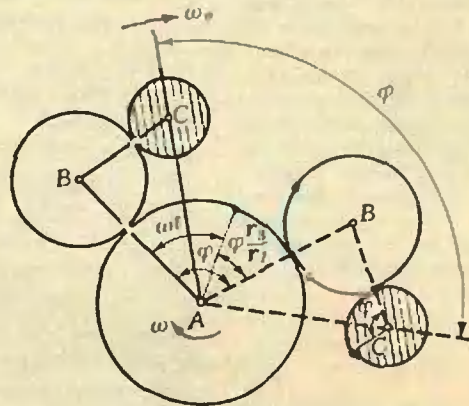


Рис. 2.

Отсюда

$$\omega = \omega_0 \left(1 - \frac{r_1}{r_3}\right)$$

В. Вангелов (Болгария)

Ф969. Две банки, сделанные из одного и того же материала, имеют одну и ту же геометрическую форму, причем все линейные размеры одной банки в k раз меньше, чем другой (см. рисунок). В дне каждой банки сделано отверстие. Банки одновременно опускают на воду. Какая банка утонет скорее? Во сколько раз?

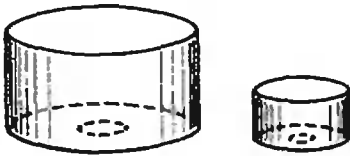
Из-за того что банки, которые погружаются в воду, сделаны из одного и того же материала, в первый момент глубина погружения каждой из них линейно связана с размером. То есть, если размеры банок различаются в k раз $l_2 = kl_1$, то в k раз различаются расстояния от поверхности воды до отверстий $h_2 = kh_1$.

Так как перепад давления по обе стороны отверстия зависит от глубины погружения $\Delta p = \rho_{\text{воды}} g h$, а скорость воды, заполняющей банку через отверстие, связана с перепадом давления — $\Delta p =$

$$= \frac{1}{2} \rho_{\text{воды}} v^2, \text{ то}$$

$$v^2 = 2gh. \quad (*)$$

В свою очередь, скорость определяет время t , за которое банка наполнится водой и пойдет ко дну.



Ф970. В тонкостенной непрозрачной сферической оболочке находится шар, радиус которого в несколько раз меньше радиуса оболочки. Предложите способ определения плотности вещества, из которого сделан шар. Масса оболочки неизвестна.

Таким образом, зависимость (*) является ключевым соотношением, связывающим время с линейными размерами через ускорение свободного падения g , которое в этой задаче играет роль единственной размерной константы, определяющей динамику процесса. То есть величины, имеющие размерность $\text{м}/\text{с}^2$, например l/t^2 , выражаются только через g и поэтому не зависят от l :

$$l_2/t_2^2 = l_1/t_1^2.$$

Следовательно,

$$t_2 = \sqrt{k} t_1.$$

И. К. Соболев

◆ Измеряем вес сферы с шаром $P = (M + m)g$, где M и m — массы сферы и шара соответственно. Прикладываем к сфере силу F (силу измеряем), направленную вертикально вниз, и в момент $t = 0$ убираем опору из-под сферы. Сфера начнет двигаться вниз с ускорением

$$g + a = \frac{Mg + F}{M}.$$

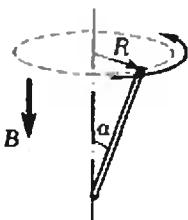
Масса m в формулу не входит, поскольку шар в момент $t = 0$ отрывается от сферы и с ускорением a (относительно сферы) движется вверх. Измерив ускорение a , находим массу сферы $M = F/a$. Измерение ускорения a надо закончить до момента удара шара о сферу в ее верхней точке. Отметив этот момент времени (по звуку удара или по скачку показаний динамометра, измеряющего силу F), рассчитываем радиус r шара. Из $S = a(\Delta t)^2/2$, где Δt — время движения шара, находим:

$$r = R - \frac{a \Delta t^2}{4}.$$

Здесь R — радиус сферы, который можно измерить непосредственно, а путь $S = 2(R - r)$. Теперь мы знаем и радиус шара, и его массу ($m = \frac{P}{g} - \frac{F}{a}$), что позволяет решить задачу.

С. А. Хорозов

Ф971. В магнитном поле, индукция \vec{B} которого вертикальна, вращается около вертикальной оси так, как показано на рисунке, металлический стержень. Угловая скорость вращения равна ω . R и α заданы. Найти разность потенциалов на концах стержня.



◆ Для решения воспользуемся выражением для ЭДС в виде

$$\mathcal{E} = - \frac{\Delta \Phi}{\Delta t}.$$

Прежде всего отметим, что ЭДС будет постоянной в любой момент времени, так как стержень всегда находится в одинаковых условиях. Поэтому мы имеем право рассмотреть его полный оборот:

$$-\Delta \Phi = \pi R^2 B,$$

$$\Delta t = \frac{2\pi}{\omega}$$

и

$$\mathcal{E} = \frac{\pi R^2 B}{2\pi} \omega = \frac{1}{2} B R^2 \omega,$$

то есть зависит только от R , а не от α .

Л. Г. Маркович

Ф972. В высокоскоростном кино съемочном аппарате, применяемом для съемки быстропротекающих процессов, пленка движется непрерывно со скоростью v . Для предотвращения смазывания изображения между пленкой и объективом установлена четырехгранная стеклянная призма с показателем преломления n , вращающаяся с постоянной угловой скоростью (рис. 1). Пренебрегая расфокусировкой изображения, определите, при какой угловой скорости изображение на пленке не смазывается. Определите толщину призмы при условии, что экспонирование изображения одного кадра проводится в пределах $(-\alpha_0, \alpha_0)$ ее угла поворота, а минимальный размер различных деталей изображения равен δ .

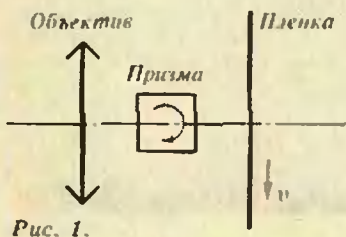


Рис. 1.

Рассмотрим точку A на оптической оси. Ее изображение A' также расположено на оптической оси при положении призмы, изображенном на рисунке 1. При повороте призмы на угол α изображение A' смещается по горизонтали на $\xi(\alpha)$ от плоскости, в которой со скоростью v движется кинопленка, и на величину $\Delta(\alpha)$ в направлении движения пленки (рис. 2). Смещение по горизонтали приводит к расфокусировке изображения. По условию этим эффектом можно пренебречь.

Рассмотрим, к чему приводит смещение $\Delta(\alpha)$. Относительно пленки изображение A' движется со скоростью $u = \frac{\Delta(\alpha)}{t} - v$. Скорость ω вращения призмы подбирают такой, что при малых углах α скорость u близка к нулю, и изображение A' неподвижно относительно пленки. Это объясняет назначение вращающейся призмы — она компенсирует смещение пленки. Зависимость $\Delta(\alpha)$ от α имеет вид (h — толщина призмы)

$$\Delta(\alpha) = h \sin \omega t \left(1 - \frac{\cos \alpha}{\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha}} \right)$$

(выведите эту формулу самостоятельно, пользуясь законом преломления).

Мгновенная скорость изображения A' в тот момент, когда оно находится на оптической оси, равна

$$\left. \frac{d\Delta(\alpha)}{dt} \right|_{t=0} = \left. \frac{d\Delta(\alpha)}{d\alpha} \cdot \frac{d\alpha}{dt} \right|_{\alpha=0} = h \frac{n-1}{n} \omega$$

и по условию

$$h \frac{n-1}{n} \omega = v. \quad (*)$$

С ростом α мгновенная скорость уменьшается, и точка A' за время поворота призмы на угол α ($t = \alpha/\omega$) экспонирует на пленке отрезок длиной $\Delta = \left(v - \frac{\Delta(\alpha)}{\alpha} \omega \right) \frac{\alpha}{\omega}$. Изображение на пленке не смазано, если за время экспозиции кадра длина этого отрезка не больше δ , то есть при $\alpha = \alpha_0$ $\Delta = \delta$, или

$$-\alpha_0 h \sin \alpha_0 \left(1 - \frac{\cos \alpha_0}{\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha_0}} \right) + h \frac{n-1}{n} \alpha_0 = \delta.$$

Отсюда находим h :

$$h = \frac{\delta}{\alpha_0} \left(\frac{n-1}{n} - \sin \alpha_0 \left(1 - \frac{\cos \alpha_0}{\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha_0}} \right) \right)^{-1}.$$

С учетом этого из (*) находим, при какой угловой скорости призмы изображение на пленке не смазано:

$$\omega = \frac{vn}{n-1} \cdot \frac{\alpha_0}{\delta} \left(\frac{n-1}{n} - \sin \alpha_0 \left(1 - \frac{\cos \alpha_0}{\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha_0}} \right) \right).$$

А. А. Лапидес

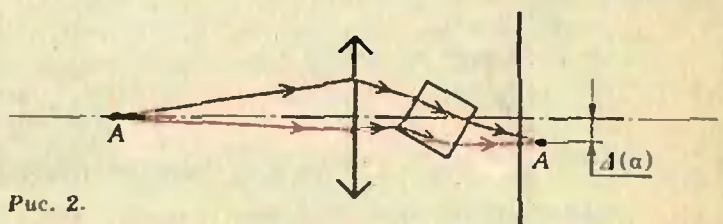


Рис. 2.

Посмотрим на экран

Ю. В. КОТОВ

Пожалуй, самым популярным устройством современных ЭВМ, особенно среди непрофессионалов, стали электронно-лучевые экраны, придающие машинам некоторое сходство с телевизорами. Дополненные клавиатурой и такими приспособлениями, как «световые перья», «визирь» и «мышки», они облегчают ввод в ЭВМ, чтение и редактирование информации, управление вычислительным процессом. К крупным ЭВМ подключают по несколько таких устройств, что позволяет одновременно работать большому числу пользователей. Даже маленькие настольные ЭВМ (так называемые персональные компьютеры) снабжаются экранами, либо подключаются к обычным бытовым телевизорам.

К сожалению, знатоки русского языка не смогли предложить для таких экранов с клавиатурой термина с русским корнем, и их называют английским словом «дисплей», иногда — «терминал». Дисплей бывает алфавитно-цифровые и графические. Первые могут показывать на своих экранах только буквы, цифры, знаки и то, что из них состоит — тексты, программы, числовые данные. Графические же дисплеи универсальны в том смысле, что отображают как графическую информацию (схемы, графики, чертежи), так и алфавитно-цифровую. Современные графические дисплеи делят на две большие группы — векторные и растровые. Если у векторных электронный луч последовательно высвечивает запрограммированные элементы изображения — отрезки, символы и иногда дуги, — то в растровых устройствах он, как и в телевизоре, «заштриховывает» экран последовательными строками, изменяя при этом свою яркость. На простейших растровых экранах изображение складывается из множества расположенных по рядам точек, и если этих рядов недостаточно много, — например, 200, 300, качество изображения невысокое. Более совершенные растровые экраны позволяют получать полутоновые и цветные изображения. Среди них есть и такие, где качество «картинки» заметно лучше, чем в бытовом телевизоре, поскольку изображение разлагается на 1000 и бо-

лее строк, к тому же нет неизбежных помех, приходящих с эфира.

Графические экраны делают общение с машиной особенно наглядным и, при наличии соответствующих программ, доступным для всех возрастов. Для повышения спроса на «бытовые» персональные компьютеры на западе развивается целая индустрия «компьютерных игр». Компьютерные игры, конечно, вещь неплохая, развивают глазомер, быстроту реакции, сообразительность, они пользуются популярностью и у нас. Но с большей пользой графические, как, впрочем, и алфавитные, терминалы применяют в учебном процессе, сочетая наглядность обучения с игровыми моментами. Мы не говорим уже об автоматизированном проектировании, научных исследованиях и других серьезных занятиях.

Цель этой заметки — показать читателям «Кванта», не имеющим доступа к подобному оборудованию, как реально выглядит экран дисплея в учебном процессе.

На фотографиях представлены примеры изображений, получаемых на экране графического терминала «ЕС-7064», подключенного к ЭВМ серии ЕС, в Московском архитектурном институте и Московском институте радиотехники, электроники и автоматики.

На первой фотографии видим — в левой части экрана — орнамент, набранный световым пером из типовых элементов, высвеченных программой в правой части экрана. В начальный момент в левой части экрана светятся только точки, помечающие узлы квадратной сетки 5×5 ячеек. Учащийся выбирает пером приглянувшуюся ему типовую фигурку из «меню» и затем «припаявает» ее в нужную ячейку сетки, указав пером два диагонально расположенных узла. При этом можно «припаять» фигурку не только в исходной ориентации, но и с поворотом на угол, кратный прямому. В одну ячейку можно «впаять» две или три различные фигурки, с помощью специальных кнопок терминала можно стирать неправильно введенные

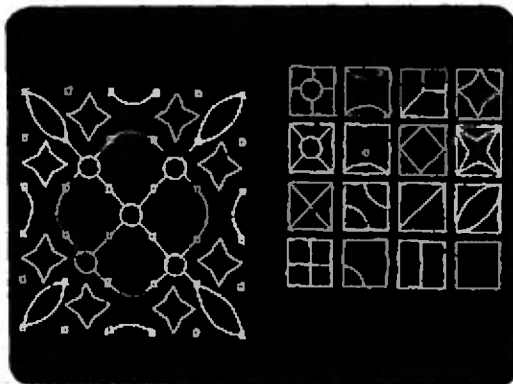


Фото 1.

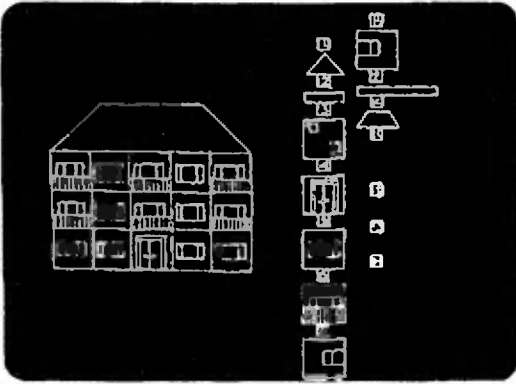


Фото 2.

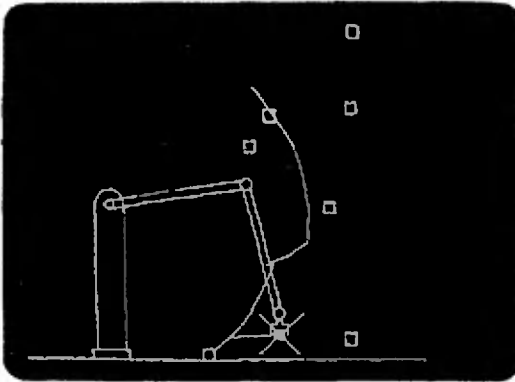


Фото 3.

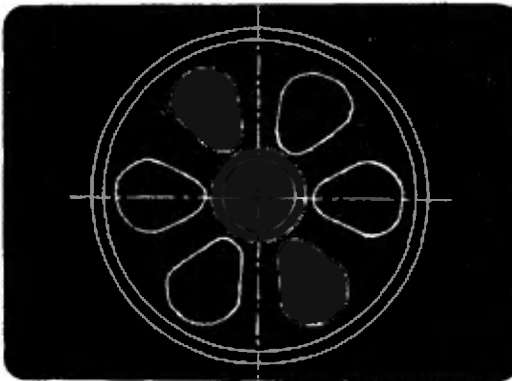


Фото 4.

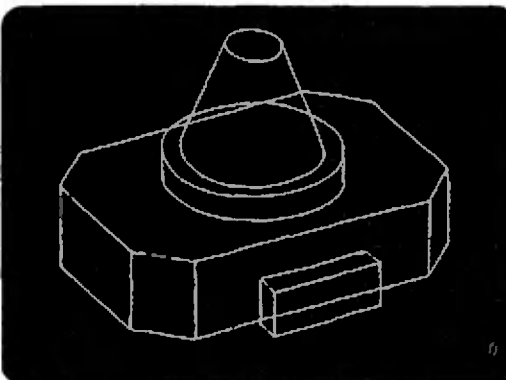


Фото 5.

фигурки, убирать после формирования орнамента опорные узловые точки, выводить информацию на перфоленту или магнитную ленту для вычерчивания орнамента на графопостроителе. Эта «игра» позволяет освоить режим «графической компоновки», понятие «графической клавиатуры» или «меню», к тому же повторить понятия переноса и поворота. С этой программой успешно развлекаются не только студенты-первокурсники, но и школьники младших классов.

На второй фотографии показана более профессиональная задача — с использованием того же принципа «спроектировать дом». Здесь сочетаются тренировка в работе с ЭВМ и архитектурно-эстетические вопросы.

На третьей фотографии мы видим изображение несложного механизма (подобие робота-манипулятора), захват которого может взять или отпустить квадратный предмет. С помощью кнопок клавиатуры управляют движением механизма и работой захвата. При одном нажатии соответствующей кнопки повернуть можно тот или другой рычаг в ту или другую сторону на «большой», «средний» или «малый» шаг. Задача состоит в том, чтобы за возможно меньшее число шагов поставить несколько предметов рядом или друг на друга. Чтобы можно было следить за работой учащегося, контрольная точка захвата оставляет на экране след. Интересно, что при очевидной простоте задачи даже профессора, впервые севшие за экран, не сразу овладевают искусством управления роботом. А есть более сложные механизмы, смоделированные в пространстве!

Теперь попробуй представить себе, как на специальном графическом языке задать фигуры, показанные на следующих двух фотографиях. Фигура «колеса» состоит из отрезков, окружностей и дуг. Но при этом используются также повторения («цикл») и преобразования координат (поворот вокруг заданной точки). Для изображения детали надо числами и специальными кодами задать размеры и нужное положение составляющих ее частей — таких, как параллелепипеды, призмы и конусы, а кроме того — задать и уточнить ракурс, под которым видна деталь (другими словами — задать аксонометрическую или перспективную проекцию).

На шестой фотографии мы видим изображение пересекающихся тел — в данном случае конуса и эллипсоида. Построение и исследование линий пересечения поверхностей — одна из традиционных тем институтского курса начертательной геометрии. Многие поколения студентов строят такие линии с помощью циркулей и линеек. Здесь же линии строит машина, но размеры тел (поверхностей) и их положение студент должен задать определенными числами. Когда тела зада-

ны, с помощью кнопок клавиатуры объект можно просмотреть в различных ракурсах и с изменением масштаба. Можно также изменять положение или размеры заданных тел. На фотографии мы видим, что линия пересечения состоит из двух овальных частей. Можете ли вы сообразить, каким образом надо передвинуть конус, чтобы линия пересечения содержала лишь одну часть?

На седьмой фотографии — графики различных синусоид. Каждая синусоида задана несколькими числами, среди которых коэффициенты, входящие в ее уравнение. Изменяя тот или иной коэффициент, учащийся может проследить, как он влияет на форму кривой. Конечно, синусоида — простейший пример, но даже при небольшом усложнении аналитического представления функции, математик и то не всегда скажет, как меняется форма графика при изменении различных величин. Здесь новую, измененную линию ЭВМ позволяет получить за несколько секунд!

На восьмой фотографии показано изображение проектируемой типовой детали. Ее параметры заданы в виде нескольких чисел в двух строках в нижней части экрана. В процессе автоматизированного проектирования подобных деталей конструкторы проверяют на экране, как будут выглядеть создаваемые детали и их рабочие чертежи. Здесь мы видим зубчатое колесо. Если некоторые его параметры получаются в результате расчетов кинематики машины, прочностных расчетов, то другие (например ширина бобышки) определяются конструктивно. Проектировщик также проверяет, правильно ли программа составила размеры и обозначения; в случае необходимости он может по предусмотренным в программе правилам внести коррективы. Окончательно изображение выводится на графопостроитель.

Наконец, на девятой фотографии — более сложный объект, нарисованный графопостроителем. Между прочим, мощности машин, недавно считавшихся большими, уже не хватает, чтобы быстро формировать и высвечивать на экране изображения такой сложности. Приходится ждать перед темным экраном минуту, две... и надеяться на дальнейший быстрый прогресс электроники. Все же и сейчас ценность таких изображений очевидна. Изменив одно или несколько чисел в описании объекта, можно получить для сравнения вариант, отличающийся композицией, пропорциями. Нетрудно просмотреть объект с разных сторон и расстояний. Выбранные «кадры» с большей точностью и подробностью переносятся на бумагу и полученные машинные чертежи могут быть доработаны вручную (раскрашены, детализированы) художниками и архитекторами.

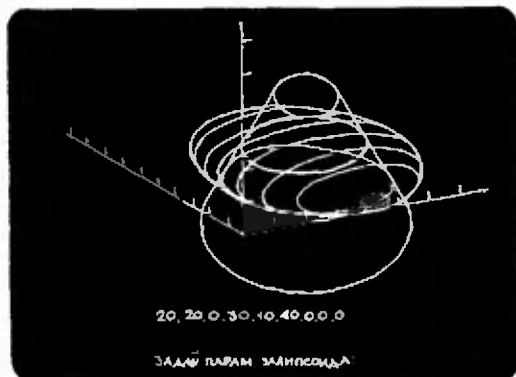


Фото 6.

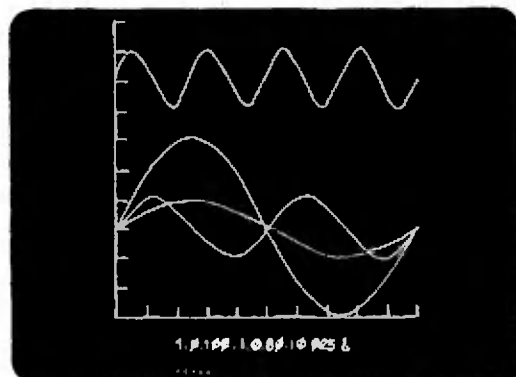


Фото 7.

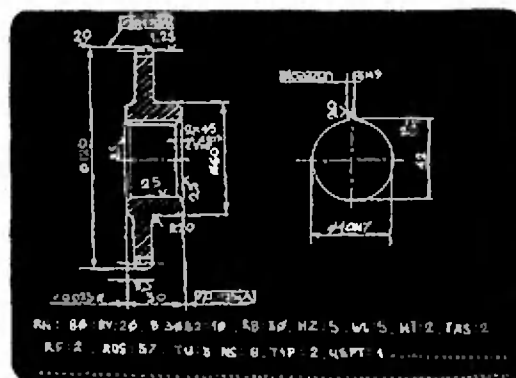


Фото 8.

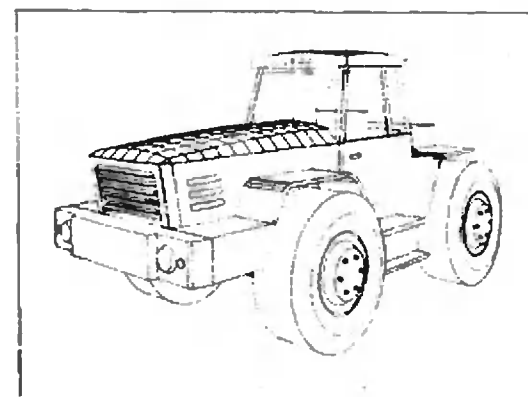
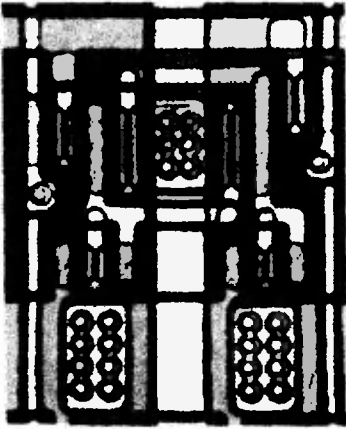
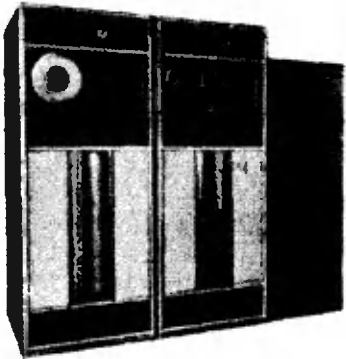


Фото 9.

$-\frac{15}{16}$ до $+\frac{15}{16}$, а порядок от -7 до $+7$. В ЭВМ серии ЕС в 32-разрядных регистрах хранятся числа от $\approx 5,4 \cdot 10^{-79}$ до $\approx 7,2 \cdot 10^{75}$.



В ЭВМ ближайшего будущего на смену кремниевым БИС придут ИС операционной памяти на основе полупроводникового материала арсенида галлия. На фотографии показана ячейка такой ИС, имеющая размер 62×65 мкм. Полевые транзисторы, входящие в состав схемы, имеют затворы длиной 1 мкм. Кристалл с объемом памяти 4 кбит содержит 26600 полевых транзисторов и имеет размер $5,6 \times 6$ мм. Быстродействие ИС — 2 нс.



Объем оперативной памяти недостаточен для решения сложных задач на ЭВМ. Основная часть информации хранится во внешней памяти, имеющей гораздо больший объем, хотя и меньшее быстродействие. На фотографии изображено устройство внешней памяти на магнитной ленте, немного похожее на обычный катушечный магнитофон. На ленте длиной 750 м может храниться до 6 млн. 32-разрядных чисел. Время считывания всей такой ленты составляет 6—7 минут.

шенно эквивалентны. Вход R используется для установки начального «нулевого» состояния триггера, а вход S — для подачи сигнала, который необходимо запомнить. Выход триггера, напряжение на котором устанавливается равным «1» при подаче «1» на S , называется основным (верхний вывод на рисунке 1), а второй вывод, напряжение на котором инверсно по отношению к входному сигналу, называется дополнительным. Инверсия, так же как и в схемах типа «НЕ», обозначается кружком.

Входы «установка нуля» R всех триггеров соединены; на них перед записью подается сигнал «1», в результате чего на всех основных выходах триггеров устанавливается «0».

Проследим, как происходит запись числа в регистр. Каждая из входных схем «И» имеет два входа. Один из них (нижний на рисунке 1) — общий для всех схем. Проводник, соединяющий эти общие входы, называется шиной записи (ЗАП). Если на шину записи подано нулевое напряжение, то на всех выходах схем «И» также будет нулевое напряжение, независимо от сигналов на вторых, «сигнальных» входах — таково свойство схем типа «И» (см. заметки в № 1, 2 «Квант», 1986). Однако, если на шину записи ЗАП подается сигнал «1» — разрешение записи, — то напряжение на выходах схем «И», а следовательно, и на S — входах триггеров будет зависеть от того, какой сигнал поступает в этот момент на вторые, сигнальные входы схем «И».

На рисунке 1 для примера показана запись числа 9 (1001). В первом и четвертом разрядах на сигнальных входах сигнал «1». Если на шине ЗАП также сигнал «1», то на вход S триггеров 1-го и 4-го разрядов поступит сигнал «1», который «перевернет» эти триггеры. В 1-м и 4-м разрядах запишется «1». В разрядах 2 и 3, где на сигнальных входах «0», на выходах схем «И» также будет «0» и в триггерах останется записанным «0».

Действие выходных схем «И» аналогично действию входных. Как только на шину считывания (СЧ) будет подан сигнал «1», на выходах схем «И» появятся сигналы «1» в тех разрядах, в которых на основном выходе триггера была записана «1».

В схемах реальных регистров используются и дополнительные выходы триггеров. На этих выходах создается так называемый «обратный код» записанного числа, в котором на месте «1» находятся «0» и наоборот. Обратный код используется в ЭВМ для осуществления некоторых арифметических операций с двоичными числами.

Совокупность регистров, используемых ЭВМ для запоминания программы работы, исходных и промежуточных данных математических действий, называется оперативной памятью. Оперативная память одной из больших отечественных ЭВМ «БЭСМ-6» содержит $32768 = 2^{15}$ регистров, каждый из которых позволяет хранить 48-разрядные двоичные числа.

От оперативной памяти требуется высокое быстродействие, потому что она должна успевать записывать и считывать числа с такой же скоростью, с какой машина производит вычисления. Среди современных промышленных интегральных схем наибольшим быстродействием обладают ИС на основе кремниевых биполярных транзисторов. Поэтому оперативная память больших ЭВМ выполняется из логических схем и триггеров на биполярных транзисторах.

Регистры микрокалькуляторов изготавливаются на основе полевых МДП-транзисторов. Быстродействие такой памяти значительно ниже, но зато МДП-транзисторы потребляют гораздо меньше энергии. Благодаря этому микрокалькуляторы могут десятки часов работать от миниатюрной батарейки.

Избранные школьные задачи

Восьмой класс

1. Найдите наименьшее значение выражения

$$2x^2 - 2xy + 5y^2 + 2x + 2y.$$

2. Найдите сумму

$$1 \cdot 3 + 3 \cdot 5 + 5 \cdot 7 + 7 \cdot 9 + \dots + 999 \cdot 1001.$$

3. Известно, что $n-1$ делится на 15, а 1001 делится на $n+1$. Найдите n .

4. В прямоугольном треугольнике ABC ($\angle C=90^\circ$) проведена высота CD . Найдите: а) радиус окружности, вписанной в треугольник ABC , если радиусы окружностей, вписанных в треугольники ACD и BCD , равны r_1 и r_2 ; б) периметр треугольника ABC , если периметры треугольников ACD и BCD равны P_1 и P_2 .

5. На окружности, описанной около правильного треугольника ABC , взята точка. Найдите сумму квадратов расстояний от этой точки до вершин треугольника, если сторона треугольника равна a .

Девятый класс

6. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + \dots + 9x_9 + 10x_{10} = 55, \\ x_2 + 2x_3 + \dots + 9x_{10} + 10x_{11} = 55, \\ x_{10} + 2x_1 + \dots + 9x_9 + 10x_9 = 55. \end{cases}$$

7. Докажите неравенство

$$\frac{xy}{z} + \frac{yz}{x} + \frac{xz}{y} > x + y + z \text{ при } xyz > 0.$$

8. Пусть AD — биссектриса угла A в треугольнике ABC . Докажите, что

$$AD^2 = AB \cdot AC - BD \cdot CD.$$

9. Докажите, что произвольную треугольную пирамиду можно рассечь плоскостью так, чтобы в сечении получился ромб.

10. Решите уравнение

$$4x^2 - 4x - 3 = 4 \left\lfloor \frac{2x-1}{2} \right\rfloor.$$

(Здесь квадратные скобки означают целую часть числа.)

Десятый класс

11. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x^3 = 7x + 2y, \\ y^3 = 2x + 7y. \end{cases}$$

12. На стороне BC треугольника ABC найдите такую точку D , чтобы окружности, вписанные в треугольники ABD и ACD , касались друг друга.

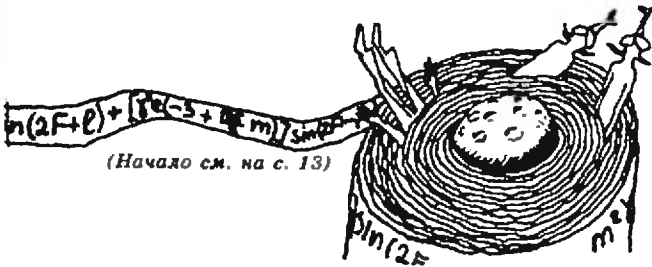
13. Решите уравнение

$$x + \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} = \frac{35}{12}.$$

14. Сколькими разными способами из листа клетчатой бумаги $m \times n$ можно вырезать прямоугольник со сторонами, идущими по линиям сетки?

15. При каком положении в пространстве спичечной коробки площадь ее тени будет наибольшей? (Тень — это ортогональная проекция на горизонтальную плоскость.)

Публикацию подготовил А. А. Егоров



(Начало см. на с. 13)

учтены не только солнечные возмущения, но и влияние несферичности Земли, притяжение планет, небольшая релятивистская поправка. И все же теория Брауна обнаруживала странные неувязки, давала хотя и очень малые, но заметные расхождения с наблюдениями. Уже в 40-х годах нашего столетия было установлено, что теория здесь опять не виновата, а имеет место неравномерность вращения Земли, а значит, и неравномерность времени, которое определяется по вращению нашей планеты. С переходом к эфемеридному времени, текущему равномерно (оно определяется с помощью атомных часов), все неувязки отпали.

Развитие космических полетов, в

том числе к Луне, установка на поверхности Луны угольковых отражателей для лазерной локации существенно повысили требования к точности лунной теории. Теперь расстояние до Луны мы можем определять с точностью до 25 см. Совершенствование ЭВМ открыло новые возможности.

Группа французских ученых сумела с помощью ЭВМ проверить теории Делоне и Хилла — Брауна и получила все нужные величины с потрясающей точностью: до 1" по углам и с «лазерной» точностью по расстоянию. Для этого пришлось брать в разложениях уже много тысяч членов. Впрочем, для ЭВМ это особого труда не составило. Созданная таким образом теория была затем с успехом применена и к изучению движения искусственных спутников Земли.

Так завершилась многовековая история построения теории движения Луны. Теперь мы знаем, что скрывается за столь, казалось бы, простой фразой: «Луна движется вокруг Земли по эллипсу...»



Тепловые процессы в газах

Кандидат физико-математических наук
А. И. БУЗДИН,
кандидат физико-математических наук
С. С. КРОТОВ

При переходе от раздела «Механика» к разделу «Молекулярная физика и тепловые явления» учащиеся не всегда достаточно ясно представляют себе принципиальные изменения в подходе к описанию изучаемых систем.

Во всех существующих в природе телах происходит движение составляющих эти тела мельчайших частиц (атомов и молекул). Оно, как известно, называется тепловым движением, и его характерная черта — беспорядочность. В механике мы отвлекаемся от этого внутреннего движения частиц и изучаем движение тела как целого. Часто можно вообще пренебречь размерами тела при описании его движения и считать тело материальной точкой. Материальная точка — основной объект механики.

В физике тепловых явлений, напротив, надо учитывать хаотическое движение гигантского числа частиц, из которых состоят газы, жидкости, твердые тела (порядка числа Авогадро $N_A \sim 10^{23}$ 1/моль). При этом главный интерес представляет нахождение усредненных величин, описывающих состояние системы в целом, — температуры, давления, плотности и т. п.

Наибольшее внимание в школе уделяется идеальным газам, подчиняющимся уравнению Менделеева — Клапейрона

$$pV = \frac{m}{M}RT,$$

где p — давление, V — объем, m — масса, M — молярная масса газа, R — универсальная газовая постоянная, T — температура газа.

Тепловым процессом можно считать

любой процесс, при котором изменяется хотя бы один параметр, характеризующий состояние газа. Так, например, при изотермическом процессе над заданным количеством газа температура поддерживается постоянной, а давление и объем изменяются (но $pV = \text{const}$, соответственно закону Бойля — Мариотта).

Вспомните, что происходит с параметрами газа при изохорическом и изобарическом процессах.

Задача 1. *Тепловой процесс, который совершается с газом в замкнутом сосуде, на V — T -диаграмме имеет вид окружности (рис. 1). В каких точках максимальны и минимальны температура газа, его объем и давление?*

Точки, где максимальны и минимальны объем и температура, указать совсем легко. Это точки касания данной окружности соответствующими горизонтальными и вертикальными прямыми — изохорами и изотермами. Для ответа на вопрос о давлении построим на этой же диаграмме изобары.

При изобарическом процессе объем газа прямо пропорционален его температуре:

$$V = \frac{mR}{Mp} T,$$

следовательно, изобары представляют собой прямые линии, проходящие через начало координат, причем наклон их тем меньше, чем больше давление. Теперь ясно, что мы должны провести из начала координат касательные к окружности. При этом нижняя касательная будет отвечать максимальному давлению, а верхняя — минимальному.

Задача 2. *На p — V -диаграмме изображен процесс расширения газа, при котором газ переходит из состояния 1 с давлением p_0 и объемом V_0 в состояние 2 с давлением $p_0/2$ и объемом*

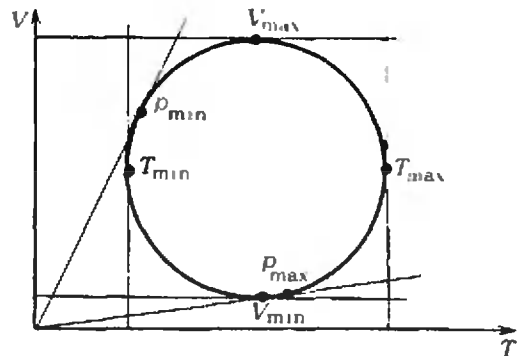


Рис. 1.

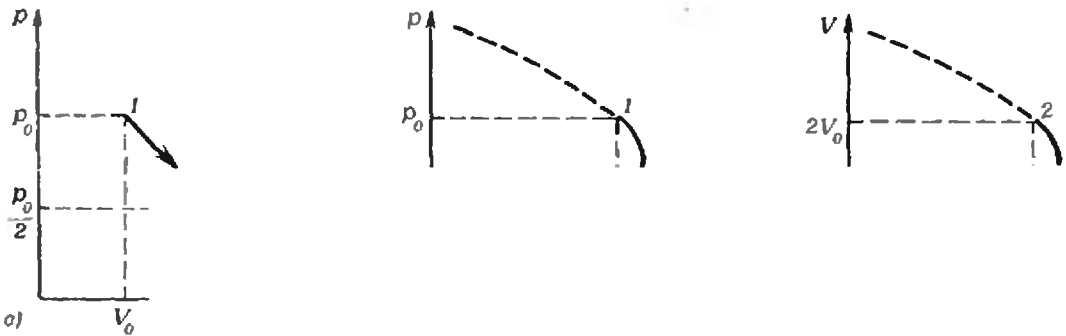


Рис. 2.

$2V_0$ (рис. 2. а). Изобразите соответствующий процесс на p - T - и V - T -диаграммах.

Поскольку на p - V -диаграмме процесс изображается отрезком прямой, давление и объем связаны соотношением $p = \alpha V + \beta$, где α и β — константы. Для их определения учтем взаимосвязь параметров p и V в состояниях 1 и 2 соответственно:

$$p_0 = \alpha V_0 + \beta, \quad \frac{p_0}{2} = 2\alpha V_0 + \beta.$$

Отсюда

$$\alpha = -\frac{p_0}{2V_0}, \quad \beta = \frac{3}{2}p_0.$$

Таким образом, уравнение теплового процесса в переменных p, V имеет вид

$$p = -p_0 \frac{V}{2V_0} + \frac{3}{2}p_0.$$

Учитывая уравнение Менделеева — Клапейрона, записанное в виде $pV = AT$ ($A = mR/M = \text{const}$), найдем уравнение процесса в переменных p, T :

$$\left(\frac{3}{2}p_0 - p\right)p = \frac{Ap_0}{2V_0}T$$

и переменных V, T :

$$V\left(3 - \frac{V}{V_0}\right) = \frac{2A}{p_0}T.$$

Так как произведение pV для состояний 1 и 2 одно и то же, конечная и начальная температуры совпадают и равны $T_0 = p_0V_0/A$. В переменных $p,$

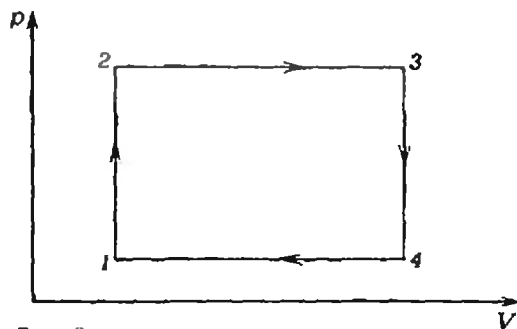


Рис. 3.

T и V, T графики процесса будут участками парабол, изображенных на рисунках 2, б и в.

Задача 3. Как меняется температура газа при тепловом процессе 1—2—3—4—1 (рис. 3)?

На участке 1—2 давление растет при постоянном объеме, значит (в соответствии с законом Шарля), растет и температура. На участке 2—3 температура также увеличивается, поскольку происходит рост объема газа при постоянном давлении (закон Гей-Люссака). Аналогичные рассуждения позволяют заключить, что на участках 3—4 и 4—1 температура падает. Ответ легко получить также, проведя соответствующие изотермы на p - V -диаграмме.

При решении данной задачи подразумевалось, что масса газа оставалась все время постоянной. Ответьте самостоятельно на такой вопрос: как должна меняться масса газа, чтобы при постоянной температуре тепловой процесс на p - V -диаграмме изображался так же, как на рисунке 3?

Задача 4. На рисунке 4 представлены две изотермы разных газов одинаковой массы. Чем отличаются эти газы, если их температуры одинаковы?

В соответствии с законом Менделеева — Клапейрона,

$$p = \frac{mR}{MV}T,$$

поэтому единственной причиной тому, почему газ 1 имеет всегда большее давление (при одном и том же объеме), является его меньшая по сравнению с газом 2 молярная масса.

Вопрос: Могут ли пересекаться какие-либо изотермы двух произвольных газов?

Задача 5. Моль идеального газа участвует в тепловом процессе 1—2—3—4—1, изображенном в p - V -координатах на рисунке 5, а. Продолжения отрезков прямых 1—2 и 3—4 проходят через начало координат, а кривые 1—4 и 2—3 являются изотерма-

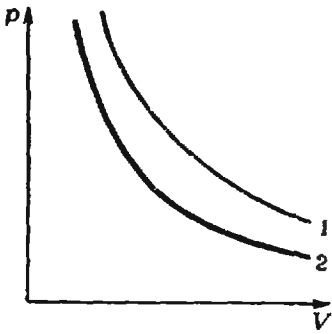


Рис. 4.

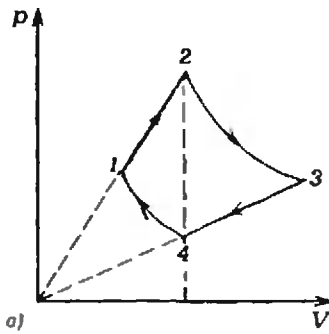
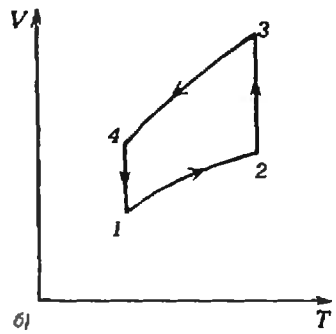


Рис. 5.



ми. Изобразите этот процесс в $V-T$ -координатах и найдите объем V_3 , если известны объемы V_1 и $V_2=V_4$.

На участке 1—2 параметры p и V связаны соотношением $p=a_1V$, на участке 3—4 $p=a_2V$, причем $a_1 > a_2$. Тогда в переменных V, T процесс можно описать следующими равенствами: на участке 1—2 $a_1V^2=RT$, на участке 2—3 $T=T_2=const$, на 3—4 $a_2V^2=RT$ и на 4—1 $T=T_1=const$. Соответствующий график изображен на рисунке 5, б.

Так как $T_1=T_4$, то $a_1V_1^2=RT_1$ и $a_2V_2^2=RT_1$, откуда

$$a_1V_1^2 = a_2V_2^2.$$

Кроме того,

$$\frac{p_1V_1}{T_1} = \frac{p_3V_3}{T_2}.$$

Поэтому

$$\frac{V_1^2}{T_1} = \frac{V_3^2}{T_2}, \quad \frac{a_2V_3^2}{T_2} = \frac{a_1V_1^2}{T_1}$$

и

$$V_3 = \frac{V_1^2}{V_2}.$$

* * *

Важнейшей характеристикой газа является его внутренняя энергия U . С точки зрения молекулярно-кинетической теории внутренняя энергия идеального газа представляет собой среднюю кинетическую энергию хаотического движения его молекул. Важно отметить, что внутренняя энергия однозначно связана с состоянием газа.

Изменение внутренней энергии при переходе газа из одного состояния в другое не зависит от способа перехода (от вида теплового процесса), а определяется лишь значениями параметров конечного и начального состояний системы. Так, для одноатомного идеального газа

$$U = \frac{3}{2} \frac{m}{M} RT, \text{ и } \Delta U = \frac{3}{2} \frac{m}{M} R \Delta T.$$

При любом тепловом процессе изменение внутренней энергии ΔU равно сумме подведенного к системе количества теплоты Q и совершенной над газом работы A :

$$\Delta U = Q + A.$$

Это — первый закон термодинамики, а по существу — закон сохранения энергии при тепловых процессах. Его можно сформулировать несколько по-другому:

$$Q = \Delta U + A',$$

где A' — работа, совершаемая самой системой.

То, как изменяется температура газа при подводе к нему тепла, определяется теплоемкостью газа. Теплоемкость C измеряется отношением количества теплоты Q , подведенного к газу, к изменению температуры газа $\Delta T: C = Q/\Delta T$. При проведении конкретных расчетов бывает удобно пользоваться как полной теплоемкостью, так и удельной (в расчете на единицу массы) или молярной (в расчете на один моль). Отметим, что теплоемкость зависит не только от свойств газа, но также и от того, при каких условиях ему сообщают тепло, то есть от вида теплового процесса, совершаемого над газом.*) Так, например, теплоемкость газа при изобарическом процессе C_p всегда больше теплоемкости при изохорическом процессе C_v .

Подумайте: Чему равна теплоемкость газа при адиабатном процессе? А при изотермическом? Возможен ли процесс, при котором теплоемкость отрицательна?

Задача 6. В горизонтальном неподвижном цилиндрическом сосуде, закрытом поршнем массы M , находится один моль идеального газа. Газ нагревают; при этом поршень,

*) Подробнее о теплоемкости газа можно прочитать в статье С. М. Козела и А. А. Шеронова «Теплоемкость идеального газа» («Квант», 1984, № 4). (Примеч. ред.)

двигаясь равноускоренно, приобретает скорость v . Найдите количество теплоты, сообщенное газу. Внутренняя энергия моля газа $U = CT$. Теплоемкостью сосуда и поршня, а также внешним давлением пренебречь.

Единственная сила, сообщающая поршню ускорение, есть сила давления газа. Раз поршень движется равноускоренно, значит, давление газа поддерживается постоянным. Пусть это давление равно p_0 , тогда работа газа

$$A' = p_0 \Delta V = \frac{Mv^2}{2}.$$

Из уравнения состояния моля газа

$$p_0 \Delta V = R \Delta T,$$

а из первого закона термодинамики

$$Q = \Delta U + A' = C \Delta T + \frac{Mv^2}{2}.$$

Откуда получаем

$$Q = \frac{Mv^2}{2} \left(\frac{C}{R} + 1 \right).$$

Задача 7. В вертикальном сосуде объемом V под тяжелым поршнем находится газ при температуре T . Масса поршня M , его площадь S . Для повышения температуры газа на ΔT градусов ему было сообщено количество теплоты Q . Найдите изменение внутренней энергии газа. Атмосферное давление p_0 , ускорение свободного падения g . Трение не учитывать.

Поскольку сообщенное газу количество теплоты известно, чтобы воспользоваться первым законом термодинамики и узнать изменение внутренней энергии газа, мы должны найти работу A , совершаемую над газом. На газ давит поршень с силой F , численно равной сумме силы тяжести поршня Mg и силы атмосферного давления на поршень $p_0 S$. При нагревании газ расширяется, поршень движется вверх, то есть против действия внешней силы, поэтому работа A отрицательна и равна

$$A = -Fx = -(Mg + p_0 S)x,$$

где x — перемещение поршня.

Во время нагревания сила F не меняется, следовательно, остается постоянным и давление газа, а тогда, в соответствии с законом Гей-Люссака,

$$\frac{V'}{V} = \frac{T'}{T},$$

где $V' = V + \Delta V$ — объем газа после нагревания, а $T' = T + \Delta T$ — его температура. Отсюда находим изменение объема ΔV и перемещение поршня x :

$$\Delta V = V \frac{\Delta T}{T}, \quad x = \frac{\Delta V}{S} = \frac{V \Delta T}{TS}.$$

Теперь мы можем определить работу, совершаемую над газом:

$$A = -Fx = -(Mg + p_0 S) \frac{V \Delta T}{TS}$$

и изменение его внутренней энергии:

$$\Delta U = Q + A = Q - (Mg + p_0 S) \frac{V \Delta T}{TS}.$$

Задача 8*. Над идеальным двухатомным газом совершают процесс, в котором давление и объем газа связаны соотношением $p = \alpha V$. Чему равна молярная теплоемкость газа при его расширении в таком процессе? Молярная теплоемкость при постоянном объеме $C_V = 5/2 R$.

Рассмотрим процесс с одним молем идеального газа. Если его объем не меняется, то работа не совершается и $Q = \Delta U = C_V \Delta T$, то есть знание теплоемкости при постоянном объеме сразу же позволяет найти изменение внутренней энергии газа:

$$\Delta U = \frac{5}{2} R \Delta T.$$

Теперь определим совершаемую газом работу A' .

Пусть в результате расширения газа от объема V до $V + \Delta V$ его температура изменилась от T до $T + \Delta T$ (мы считаем ΔV и ΔT малыми). Давление газа при этом увеличилось от p до $p + \Delta p$, где $\Delta p = \alpha \Delta V$. Поскольку ΔV мало, работу газа можно считать равной

$$A' = p \Delta V.$$

Затем запишем уравнение Менделеева — Клапейрона для моля газа при температурах T и $T + \Delta T$:

$$pV = RT, \quad (p + \Delta p)(V + \Delta V) = R(T + \Delta T).$$

Вычитая из второго уравнения первое и пренебрегая произведением малых величин $\Delta p \Delta V$ по сравнению с Δp и ΔV , получим

$$p \Delta V + V \Delta p = R \Delta T.$$

Поскольку $V = p/\alpha$ и $\Delta p = \alpha \Delta V$, произведение $V \Delta p = (p/\alpha)(\alpha \Delta V) = p \Delta V$ и

$$p \Delta V + V \Delta p = 2p \Delta V = R \Delta T.$$

Отсюда находим работу газа

$$A' = p \Delta V = \frac{R \Delta T}{2}$$

и подведенное к газу количество теплоты

$$Q = \Delta U + A' = \frac{5}{2} R \Delta T + \frac{1}{2} R \Delta T = 3R \Delta T.$$

Таким образом, молярная теплоемкость газа в данном процессе будет равна

$$C = \frac{Q}{\Delta T} = 3R.$$

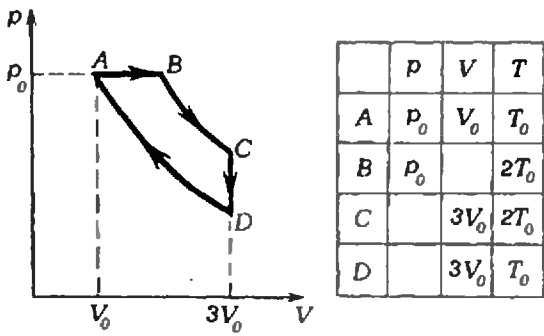


Рис. 6.

Упражнения

1. Состояние идеального газа изменяется по циклу ABCDA, изображенному на рисунке 6. В таблице указаны некоторые параметры газа в соответствующих точках цикла.

Варианты вступительных экзаменов

**Ленинградский
государственный
университет
им. А. А. Жданова**

Математика
Письменный экзамен
Вариант 1

(Математико-механический факультет)

1. Для каких действительных значений a каждое решение неравенства

$$(0,4)^{x^2+1} > (6,25)^{a-3x}$$

является решением неравенства $x^2 - 6x + 4 < a^2$?

2. Решите уравнение

$$1 + \log_{x-2}(4x-11) = 2 \log_{4x-11}(4x^2-19x+22).$$

3. Решите уравнение

$$2 \sin x = \sqrt{4 + \cos 3x}.$$

4. В равнобедренной трапеции, описанной около окружности радиуса R , отношение длин боковой стороны и большего основания есть заданное число k . Найдите длину меньшего основания.

5. Две секущие плоскости расположены симметрично относительно центра шара радиуса R . Найдите множество возможных значений отношения площади полной поверхности части шара, заключенной между обеими плоскостями к площади поверхности шара. Считая, что это отношение равно $7/8$, определите расстояние от центра шара до секущей плоскости.

Вариант 2
(Факультет прикладной математики — процессов управления)

1. В математической модели экономического роста хозяйства, производящего некоторый продукт для потребления и увеличения запасов основных фондов, P (ежегодное потребление продукта на душу занятых в произ-

Определите недостающие параметры и заполните таблицу до конца.

2. Процесс, происходящий в цилиндре теплового двигателя с идеальным газом, изображен в p - V -координатах на рисунке 3. Известно, что $T_1=300$ К, $T_2=500$ К, $T_3=450$ К. Найдите, на сколько градусов температура в точке 2 отличается от температуры в точке 4.

3. Процесс с идеальным газом сначала идет так, что давление и объем связаны равенством $p\sqrt{V}=B$. Когда температура газа достигает значения T , процесс продолжается при ином характере зависимости давления от температуры: $p=D/V^2$. Найдите упомянутую температуру T , если константы B и D , а также количество вещества ν заданы.

4. Какая часть воздуха выйдет из аудитории при повышении температуры в ней на 10 градусов?

5*. Найдите теплоемкость одного моля идеального одноатомного газа при тепловом процессе, в котором $p=aV^n$ (a и n — константы).

водстве) и x (число занятых в производстве рабочих) связаны функциональной зависимостью

$$P = \frac{x(M-x)-b}{x},$$

где M , b — постоянные, характеризующие производственные возможности хозяйства. При $M=250$, $b=8464$ определите число рабочих, соответствующее наибольшему значению P , в хозяйствах с 80, 90, 120 и 150 рабочими местами.

2. Решите неравенство

$$x > \log_{1/2}(4-x) + \log_2(6^x + (x-1)2^x).$$

3. Решите неравенство

$$2 + \sin x = \frac{3(1 + \cos x)}{\sin x}.$$

4. Средняя линия трапеции делится одной из диагоналей в отношении k и делит трапецию на две части, меньшая из которых — площадь S . Найдите площадь трапеции.

5. В правильной шестиугольной пирамиде угол между смежными боковыми гранями равен β , а сторона основания равна a . Найдите площадь диагонального сечения пирамиды, содержащего центр основания. (Диагональным сечением называется сечение пирамиды плоскостью, проходящей через два боковых ребра, не лежащих в одной грани.)

Вариант 3
(Физический факультет)

1. Определите a так, чтобы сумма квадратов всех решений уравнения

$$2 \log_a |x-1| - \log_a x = 1$$

равнялась 34.

2. Решите неравенство

$$4x + \sqrt{(6-x)(7-3x)} > 0.$$

3. Решите уравнение

$$\sin^2 2x - 2 \cos 2x = 1 + 4 \sin^4 \left(x - \frac{\pi}{4} \right).$$

4. В равнобедренной трапеции боковая сторона равна s , а диагональ, равная l , делит площадь трапеции в отношении $3/5$. Найдите основания трапеции.

5. В правильной треугольной пирамиде боковая грань образует угол α с плоскостью

основания. Найдите величину двугранного угла, образованного двумя боковыми гранями.

Вариант 4

(Химический факультет)

1. В лаборатории имеется смесь, общий вес которой на 3,3 кг больше веса содержащегося в ней титана. Определите общий вес смеси и процентное содержание титана, если известно, что при добавлении 2 кг новой смеси, содержащей 25% титана, получается смесь, содержащая 20% титана.

2. Вычислите отрицательный коэффициент b и корни уравнения $x^2 + bx - 1 = 0$, если известно, что с увеличением каждого из этих корней на 1 они становятся корнями уравнения $x^2 - b^2x - b = 0$.

3. Решите уравнение

$$\sin 2x + \sin 4x = \sin x + 2 \cos x \sin 4x.$$

4. Три круга радиусов r , $\frac{3}{2}r$, $\frac{3}{2}r$ рас-

положены на плоскости так, что каждые два из них касаются друг друга внешним образом (имеют только одну общую точку). Определите радиус круга, в который вписана данная система трех кругов.

5. Основанием пирамиды является прямоугольник с меньшей стороной a и углом между диагоналями α . Найдите объем пирамиды, если все боковые ребра образуют с плоскостью основания угол β .

Вариант 5

(Геологический и географический факультеты)

1. Пешеход и велосипедист отправляются из пункта A в пункт B . Скорость пешехода равна 5 км/ч. После того как он прошел 8 км, его догоняет велосипедист, выехавший на 1 час 16 минут позднее. Новая встреча происходит через 24 минуты с момента, когда пешеход, пройдя еще 8 км, остановился на отдых, а велосипедист, доехав до пункта B , после 20-минутной остановки в B возвращается из B в A . Найдите расстояние между A и B и скорость велосипедиста.

2. Решите уравнение

$$\cos^2 5x + \cos^2 x + \cos 6x = 1.$$

3.1. (геологический факультет). Решите уравнение $18x^2 + 2/x^2 = 16 - 3x - 1/x$.

3.2. (географический факультет). Решите неравенство $18x^2 + 2/x^2 < 16 - 3x - 1/x$.

4. Изобразите на плоскости множество точек $M(x; y)$, для которых

$$|x+y| > 2, \quad x^2 + y^2 < 2(1+x+y),$$

и вычислите его площадь.

5. В правильной треугольной пирамиде плоский угол при вершине равен 90° , а площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через одну из вершин основания и середины противоположных этой вершине боковых ребер, равна 6 см². Найдите объем пирамиды.

Вариант 6

(Биолого-почвенный факультет)

1. В совхозе имеются две теплицы общей площадью в 160 кв. метров. В 1-ой теплице собрали 1800 кг огурцов, а во 2-й — 1320 кг, причем во 2-ой теплице с 1 кв. метра собрали на 4 кг огурцов больше, чем с 1 кв. метра в 1-ой теплице. Сколько собрали огурцов с 1 кв. метра в той и другой теплице?

2.1. Решите уравнение

$$\log_{2 \cos x} (7 - 3 \operatorname{tg}^2 x - 6 \cos 2x) = 2.$$

2.2. (отделение почвоведения). Решите уравнение

$$7 - 3 \operatorname{tg}^2 x - 6 \cos 2x = 4 \cos^2 x.$$

3.1. Решите неравенство

$$\sqrt{3^{1-x} - \frac{24}{1-3^x}} < \sqrt{9 - \frac{8}{1-3^x}}.$$

3.2. (отделение почвоведения). Решите уравнение

$$\sqrt{3^{1-x} - \frac{24}{1-3^x}} = \sqrt{9 - \frac{8}{1-3^x}}.$$

4. В квадрате $ABCD$ со стороной a точки E и F являются серединами сторон AB и CD соответственно. Точка K лежит на CF , точка N — на AD , а отрезки EF и KN пересекаются в точке M . Найдите площадь треугольника KFM , если известно, что $\frac{|CK|}{|KF|} = \frac{1}{5}$, а площадь трапеции $EMNA$ составляет $\frac{3}{10}$ площади квадрата.

5. Угол между прямой и плоскостью равен α , а проекция прямой на плоскость образует угол β с другой прямой, лежащей в этой плоскости. Найдите угол между прямыми.

Вариант 7

(Факультет психологии)

1. Определите год рождения одного из основоположников науки нового времени, если известно, что сумма цифр его года рождения равна 21, а если к году рождения прибавить 5355, то получится число, написанное теми же цифрами, но в обратном порядке.

2. В зависимости от a расположите в порядке возрастания числа 4, 1 и корни уравнения $x^2 - 2ax + 2a^2 - 4a + 3 = 0$.

3. На отрезке $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$ решите неравенство

$$\sin 4x + \sin 3x < \sin 2x - 2 \sin x.$$

4. Найдите длину стороны квадрата, вписанного в равнобедренный треугольник с основанием a и боковой стороной b так, что две его вершины лежат на основании, а две другие вершины — на боковых сторонах.

5. В правильной треугольной пирамиде по стороне основания a и величине α двугранного угла, образованного двумя боковыми гранями, определите длину бокового ребра.

Физика

Письменный экзамен

Физический факультет

Вариант 1

1. Небольшой шар массой M , подвешенный на невесомой и нерастяжимой нити длиной l , совершает гармонические колебания с амплитудой A . В тот момент, когда шар максимально удален от положения равновесия, из точки, находящейся на одной высоте с точкой подвеса на расстоянии L по горизонтали от нее, вылетает пуля массой m . Траектория пули лежит в плоскости колебаний шара. С какой скоростью должна вылететь пуля, чтобы она попала в шар в тот момент, когда он проходит через положение равновесия, причем после застревания пули в шаре и мгновенного обрыва нити оба тела упали бы вертикально вниз? Сопротивлением воздуха пренебречь.

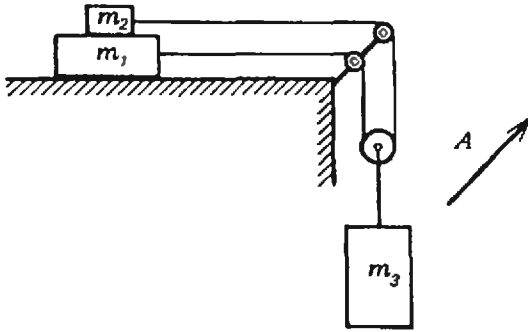


Рис. 1.

Рис. 2.

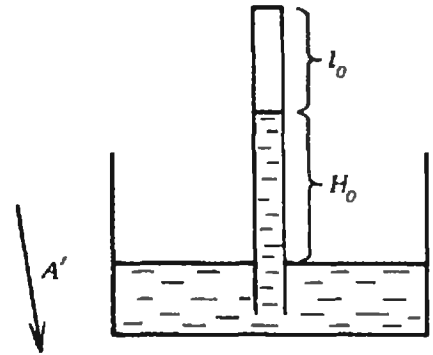


Рис. 3.

2. В закрытом цилиндрическом сосуде, расположенном вертикально, поршень разделяет две равные массы газа. Если температура газа везде одинакова, объем нижней части в 3 раза меньше объема верхней части сосуда. Во сколько раз нужно изменить температуру газа внизу, оставив неизменной температуру сверху, чтобы объем нижней части был в 4 раза меньше объема верхней части? Газ считать идеальным.

3. Какое минимальное число батареек с ЭДС $\mathcal{E}=10$ В и внутренним сопротивлением $r=4$ Ом нужно соединить параллельно и каким должно быть сопротивление шунта, чтобы обеспечить работу нагрузки, рассчитанной на напряжение $U=2$ В и мощность $P=25$ Вт?

4. Узкий параллельный пучок лазерного излучения распространяется в среде с показателем преломления n_1 на расстоянии l от оси, проходящей через центр прозрачного шара радиуса R . Ширина пучка много меньше радиуса шара. Найдите угол отклонения пучка от первоначального направления, если шар изготовлен из оптически менее плотного вещества с показателем преломления n_2 .

5. Теоретический вопрос. Постулаты Бора. Излучение и поглощение энергии атомами.

Вариант 2

1. На горизонтальной поверхности лежит брусок массой m_1 , а на нем находится брусок массой m_2 . Через систему невесомых блоков на них действует груз массой $m_3=m_1+m_2$ (рис. 1). Коэффициент трения между брусками равен μ , между нижним бруском и поверхностью трение отсутствует. Найдите, при каком соотношении масс бруски движутся с одинаковыми ускорениями. Нити нерастяжимы и невесома.

2. Два поршня, скользящих без трения внутри горизонтально расположенного цилиндрического сосуда, делят его объем на 3 части. В одной части находится идеальный газ с молярной массой M_1 , в другой — с молярной массой M_2 , в третьей — с молярной массой M_3 . Массы газов равны m_1, m_2, m_3 соответственно, а их температуры T_1, T_2, T_3 . Найдите соотношения между объемами частей сосуда.

3. Батарея аккумуляторов, соединенных последовательно, подключается один раз к нагрузке с сопротивлением R_1 , а другой раз — к нагрузке с сопротивлением R_2 . Сколько аккумуляторов соединено в батарею и какова ЭДС одного аккумулятора, если в обоих случаях на нагрузку выделялась одна и та же мощность? Внутреннее сопротивление одного аккумулятора равно r .

4. На рисунке 2 даны: A — предмет, A' —

его изображение. Найдите положения линзы и ее фокусов.

5. Теоретический вопрос. Фотоэффект.

Задачи устного экзамена

Математико-механический факультет, факультет прикладной математики — процессов управления, химический и геологический факультеты

1. Тело свободно падает с высоты $h=270$ м. Разделите эту высоту на три части, такие, чтобы на прохождение каждой из них потребовалось бы одно и то же время.

2. Веревка выдерживает груз массой $m_1=90$ кг при вертикальном подъеме его с некоторым ускорением и груз массой $m_2=110$ кг при движении вниз с таким же ускорением. Груз какой максимальной массы можно поднимать с помощью этой веревки с постоянной скоростью?

3. Два шара подвешены на тонких параллельных нитях, касаясь друг друга. Меньший шар отводится на некоторый угол от первоначального положения и отпускается. После удара шары поднимаются на одинаковую высоту. Определите массу меньшего шара, если масса большего $M=0,6$ кг, а удар — абсолютно упругий.

4. В чашечный ртутный барометр попал воздух, в результате чего при нормальных условиях барометр показывает $H_0=740$ мм рт. ст., а расстояние от уровня ртути в трубке до запаянного конца $l_0=10$ см (рис. 3). Чему равно истинное значение атмосферного давления при температуре $t=20^\circ\text{C}$, если в этом случае барометр показывает $H=730$ мм рт. ст.? Тепловым расширением ртути и трубки пренебречь.

5. Некоторое тело находится в воздухе при нормальных условиях. При увеличении температуры воздуха на $\Delta t_1=10^\circ\text{C}$ (но постоянном давлении) вес тела увеличивается на $\Delta P_1=0,02$ Н. Как изменится вес тела при увеличении температуры воздуха до $t_2=50^\circ\text{C}$ и увеличении давления до $p_2=800$ мм рт. ст.? Расширением тела пренебречь.

6. После того как в комнате протопили печь, температура поднялась с $t_1=15^\circ\text{C}$ до $t_2=27^\circ\text{C}$. На сколько процентов изменилось число молекул воздуха в этой комнате?

7. Два одинаковых резистора с сопротивлением R каждый подключаются к источнику с ЭДС \mathcal{E} и внутренним сопротивлением r сначала параллельно, а затем последовательно. В каком случае потребляется большая мощность во внешней цепи?

8. Вольтметр со шкалой на $U=100$ В имеет сопротивление $R=10$ кОм. Какую наибольшую

разность потенциалов можно измерить этим прибором, если присоединить к нему добавочное сопротивление $R_x = 90$ кОм?

9. Перемещая линзу между предметом и экраном, нашли два положения, при которых линза дает на экране четкое изображение предмета. Найдите высоту предмета, зная, что высота первого изображения h_1 , а второго h_2 .

10. Источник света расположен на расстоянии, равном $1,5 F$ от собирающей линзы (F — ее фокусное расстояние). На каком расстоянии от линзы необходимо поместить плоское зеркало, чтобы лучи, отраженные от зеркала, вторично пройдя линзу, собрались на двойном фокусном расстоянии от нее?

Публикацию подготовили В. Ф. Осипов, В. Н. Скребов, Г. А. Федотов

Ленинградский политехнический институт им. М. И. Калинина

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1

(Факультеты физико-механический, технической кибернетики, радиофизический)

1. Найдите $\lg 2a$, если известно, что $\sin(\alpha - 90^\circ) = \frac{5}{13}$ и $\sin \alpha < 0$.

2. В конус вписана правильная шестиугольная пирамида так, что их вершины и плоскости оснований совпадают. Найдите объем и боковую поверхность конуса, если боковые грани пирамиды составляют угол $\frac{\pi}{3}$ с основанием, а длина стороны основания равна 2.

3. Решите неравенство $\frac{\lg^2 x - 3 \lg x + 3}{\lg x - 1} < 1$.

4. Найдите период функции $y = f'(x)$ и нарисуйте ее график, если

$$f(x) = \frac{\cos\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) + \sin(3\pi - 4x) - \cos\left(\frac{5\pi}{2} + 6x\right)}{4\sin(5\pi - 3x)\cos(x - 2\pi) - \frac{3}{4}x}$$

5. Известно, что многочлен

$$p(x) = x^4 + (\beta + 2)x^3 + (a + 2\beta)x^2 + (3a + \beta - 4)x + 2a - 3$$

имеет корень, не зависящий от a и β . Найдите этот корень. Найдите все такие числа a , β , что $p(x)$ равен квадрату квадратного трехчлена.

Вариант 2

(Факультет технической кибернетики)

1. Найдите x , если числа $\lg 2$, $\lg(2^x - 1)$, $\lg(2^x + 3)$ являются последовательными членами арифметической прогрессии.

2. Решите уравнение $2(1 - \cos 2x) = \sqrt{3} \lg x$.

3. Решите уравнение $2 - 4 \log_3 \sqrt{x-1} = \log_3(5x+3)$.

4. В параллелограмме $ABCD$ точка M — середина стороны BC , точка N — середина CD . Пусть E — точка пересечения AM с BD , а

F — точка пересечения AN с BD . Выразите вектор \overrightarrow{NE} через \vec{e}_1 и \vec{e}_2 , если они имеют единичную длину и сонаправлены с \overrightarrow{AB} и \overrightarrow{AD} соответственно, а $|\overrightarrow{AB}| = 4$, $|\overrightarrow{AD}| = 7$.

5. Найдите область определения функции

$$f(x) = \lg \frac{4 \cos^2 x - 6e^{\cos 2x} + 2}{30x^2 - x - 1}$$

Вариант 3

(Факультеты физико-механический и радиофизический)

1. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = 9, \\ xy = 324. \end{cases}$$

2. Решите неравенство

$$\frac{x}{x-3} - 1 > \frac{1}{x+2}$$

3. Решите уравнение

$$\log_3(4 \cdot 3^x - 1) = 2x - 1.$$

4. Диагонали разбивают выпуклый четырехугольник на четыре треугольника. Радиусы окружностей, описанных около этих треугольников, одинаковы и равны 2. Найдите длины сторон четырехугольника.

5. Для функции $F(x) = (\sin x)^{-1/3} \cos x + x + 1$ найдите область определения и промежутки возрастания и убывания. Исходя из найденного установите, что больше: $A = \cos 3 \times \sqrt{\sin 2} - \cos 2 \cdot \sqrt{\sin 3}$ или $B = \sqrt{\sin 2} \cdot \sin 3$.

Физика

Задачи устного экзамена

1. Тело подвешено на нити длиной l . Какую скорость надо сообщить этому телу, чтобы оно, двигаясь по окружности, смогло только-только достигнуть верхней точки своей траектории?

2. Твердое тело движется в воздухе со скоростью v , превышающей среднюю скорость движения молекул воздуха. Покажите, что сила сопротивления пропорциональна $S v^2$, где S — площадь лобового сечения тела.

3. Одноатомный газ массой $m = 5$ кг (молярная масса газа $M = 4 \cdot 10^{-3}$ кг/моль) нагревают на $\Delta T = 150$ К при постоянном объеме. Найдите количество теплоты, сообщенное газу.

4. Электрон движется в магнитном поле по круговой орбите с угловой скоростью $\omega = 2 \cdot 10^{10}$ рад/с. Индукцию магнитного поля увеличили в $n = 1,5$ раза. С какой угловой скоростью теперь вращается электрон?

5. Упругая пружина жесткостью $k = 40$ Н/м подвешена вертикально. К ее нижнему концу прикреплено тело массой $m = 0,8$ кг. В некоторый момент тело оттягивается вниз на $a = 0,15$ м и освобождается. а) На какую максимальную высоту поднимется после этого тело? б) Определите максимальную скорость тела.

6. Шар массой m падает с высоты h на вертикальную пружину с жесткостью k и сжимает ее на величину x . Выразите максимальное сжатие пружины через m , h и k . Масса пружины пренебрежимо мала по сравнению с массой шара.

7. Две тонкие собирающие линзы с фокусными расстояниями F_1 и F_2 расположены рядом (вплотную друг к другу). Найдите оптическую силу этой системы.

Публикацию подготовили Ю. Д. Максимов, В. П. Полов, С. П. Преображенский, И. Б. Русанов

Ленинградский государственный педагогический институт им. А. И. Герцена

Физика

Задачи устного экзамена

Физический факультет

1. Из водоема с глубины $h=11$ м подъемным краном равномерно поднимают бетонный куб массой $m=2200$ кг. Определите механическую работу по подъему этого куба до касания его верхней грани поверхности воды. Плотность бетона $\rho=2200$ кг/м³.

2. К закрепленному вертикально в штативе динамометру подвесили некоторый груз. При этом груз пришел в колебание с частотой $\nu=5$ Гц. На сколько окажется растянутой пружина динамометра после полного прекращения колебаний груза? Массу пружины не учитывать.

3. Точка расположена в фокальной плоскости рассеивающей линзы, фокусное расстояние которой $F=10$ см, на расстоянии $a=2$ см от главной оптической оси линзы. Найдите положение изображения этой точки в линзе. Результат получите аналитически и графически.

Математический факультет

1. Тело движется из состояния покоя равноускоренно. Определите, во сколько раз путь, пройденный этим телом за восьмую секунду, будет больше пути, пройденного за третью секунду.

2. Электрический чайник имеет две обмотки. При включении одной из них вода в чайнике закипает через $t_1=15$ мин, при включении другой — через $t_2=30$ мин. Через сколько минут закипит вода в чайнике при одновременном параллельном включении обеих обмоток?

Индустриально-педагогический факультет

1. Колбу наполнили наполовину горячей водой, закрыли и стали выкачивать из нее воздух. Опишите, какие процессы при этом будут наблюдаться.

2. При ремонте электроплитки ее спираль укоротили на 0,1 ее первоначальной длины. Во сколько раз при этом изменится мощность плитки?

Естественный факультет

1. Снаряд разорвался при падении на поверхность земли через $t_1=10$ с после выстрела. Второй снаряд разорвался через $t_2=5$ с после выстрела. На какой высоте разорвался второй снаряд, если условия стрельбы не менялись?

2. Какую работу совершит воздух, масса которого $m=200$ г, при изобарном нагревании на $\Delta T=20$ К? Какое количество теплоты при этом будет передано воздуху? Удельная теплоемкость воздуха при постоянном давлении равна $c=14$ кДж/(кг·К).

3. Какую энергию надо израсходовать, чтобы при электролизе раствора медного купороса выделить $m=1$ г меди? Электролиз ведется при напряжении $U=4$ В. Электрохимический эквивалент меди $k=0,33$ мг/Кл. Потери на нагревание не учитывать.

Публикацию подготовил
Л. А. Бирюков

Ленинградский электротехнический институт им. В. И. Ульянова (Ленина)

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1

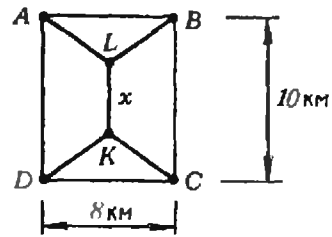
1. Дана функция $f(x)=3x(x-1)^2$.

1.1. Найдите экстремумы функции f при $x < 1$.

1.2. Решите неравенство $f(x) < 6(x-1)$.

1.3. Сколько различных корней имеет уравнение $f(x)=kx$ в зависимости от k ?

1.4. Есть ли на графике функции $f(x)$ пары различных точек, симметричных относительно прямой $3x=1$?



2. Четыре поселка A, B, C и D находятся в вершинах прямоугольника 8×10 км (см. рисунок). Предполагается соединить их сетью дорог по схеме, указанной на рисунке ($|AL|=|BL|=|CK|=|DK|$).

2.1. Докажите, что общая длина всех пяти участков дороги равна $L(x)=x+2\sqrt{164-20x+x^2}$.

2.2. Найдите x , если $L(x)=24$.

2.3. При каком значении x общая длина дорог минимальна?

3. Даны функции $f(x)=x^2$, $g(x)=\ln x$.

3.1. Найдите промежутки монотонности функции $f-g$.

3.2. Решите уравнение $f(g(x))=g(f(x))$.

3.3. При каких значениях k уравнение $f(x)=kg(x)$ имеет единственное решение?

Вариант 2

1. Дана функция $f(x)=\log_3(9-3^x)-1$.

1.1. Найдите область определения функции f .

1.2. Решите уравнение $f(x)=0$.

1.3. Решите неравенство $f(x) < 2x$.

1.4. При каких значениях параметра a уравнение $f(x)=a-x$ имеет хотя бы один корень?

2. В равнобедренный треугольник ABC с углом α при основании AC вписана окружность радиуса 1 с центром в точке O .

2.1. Найдите площадь $S(\alpha)$ треугольника ABC .

2.2. Пусть $t=\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$. Докажите, что $S(\alpha)=\frac{2}{t-t^3}$.

2.3. Найдите наименьшее значение величины $S(\alpha)$.

2.4. Какие значения может принимать периметр треугольника ABC ?

3. Цилиндр объема 1 имеет радиус основания R . Второй цилиндр имеет на 0,1 больший радиус, и на 0,2 большую высоту, чем первый.

3.1. Найдите $V(R)$ — объем второго цилиндра.

3.2. При каком R величина $V(R)$ минимальна?

Публикацию подготовил С. В. Фомин



Заочная физическая школа при МГУ

Заочная физическая школа (ЗФШ) при физическом факультете Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова объявляет прием учащихся в 9 и 10 классы на очередной учебный год.

Основная цель ЗФШ — помочь учащимся средней школы глубже изучить физику в объеме школьной программы, а также лучше подготовиться к вступительным экзаменам по физике в высшие учебные заведения и в первую очередь — на физический факультет МГУ.

Прием в ЗФШ проводится по результатам решения вступительного задания, публикуемого ниже. Решение вступительного задания необходимо отослать до 1 сентября по адресу: 119899 Москва ГСП, Ленинские горы, МГУ, физический факультет, ЗФШ. В письмо вложите два экземпляра анкеты, написанной на листах плотной бумаги размером 7×12 см и заполненной по следующему образцу:

Фамилия, имя, отчество
Класс ЗФШ
Профессия родителей
Подробный домашний адрес
Номер и адрес школы

Сидоров Иван Петрович

9-й

мать — врач, отец — инженер

*240816 г. Калуга, ул. К. Либкнехта, д. 4, кв. 73
школа № 10, ул. Пушкина, д. 3.*

Решение приемной комиссии о зачислении будет сообщено до 20 октября. Проверенные вступительные задания не возвращаются.

Зачисленным в ЗФШ в течение года высылаются методические разработки и контрольные задания по разделам физики, изучаемым в средней школе. Решенные задания оцениваются, рецензируются и высылаются обратно. Учащиеся 9 класса ЗФШ по окончании года переводятся в 10 класс на основании оценок, полученных за решение контрольных заданий. Успешно окончившие обучение получают удостоверение об окончании ЗФШ.

Вступительное задание

Поступающие в 9 класс ЗФШ решают задачи 1—4, а поступающие в 10 класс — задачи 4—7.

1. «Сила». Какая сила действует в сечении, находящемся на расстоянии x от конца однородного стержня длиной l , к которому приложена сила F , направленная вдоль стержня?

2. «Удар». Шарик налетает на стенку со скоростью v под углом α к ее нормали. Определите модуль скорости шарика после упругого удара о стенку, если: а) стенка неподвижна; б) движется со скоростью u по своей нормали навстречу шарiku; в) движется со скоростью u под углом β к своей нормали навстречу шарiku.

3. «Отскок». Какое расстояние по горизонтали пролетит мяч, брошенный со скоростью $v = 10$ м/с под углом $\alpha = 60^\circ$ к горизонту, если он ударится о потолок? Высота потолка $h = 3$ м, удар упругий. Спротивлением воздуха пренебречь.

4. «Автобус». По прямому шоссе идет автобус. Вы можете бежать со скоростью в два

раза меньшей, чем скорость автобуса. Вы заметили автобус в точке А. Из какой области около шоссе можно успеть на автобус?

5. «Кобра». С какой силой давит на землю кобра, когда она, готовясь к прыжку, поднимается вертикально вверх с постоянной скоростью v ? Масса змеи m , ее длина l .

6. «Вакуум». Две полусферы соединены в сферу, из которой частично откачан воздух, и подвешены в точке полюса. Полусферы оторвутся друг от друга, если к точке противоположного полюса подвесить груз массой M . До какой температуры нужно нагреть воздух внутри сферы, чтобы она развалилась без дополнительного груза? Масса каждой полусферы m , наружный радиус r , атмосферное давление p_0 , начальная температура воздуха и сферы T_0 . Тепловым расширением сферы пренебречь.

7. «Напряжение». Какую наибольшую разность потенциалов можно получить, имея батарейку с ЭДС \mathcal{E} и два одинаковых конденсатора?

Поправка

(см. «Квант» № 2, 1986 г.)

На с. 52 в 4-й строке правого столбца неправильно напечатан знак корня. Должно быть $\sqrt{3x^2 - 2} \sqrt{3} (\cos \mu x + \cos \lambda z) x + 4$.

На с. 61 в решении задачи 5 варианта 8 вместо $x + by$ следует читать $2x + by$. Система уравнений поэтому будет иметь вид

$$\begin{cases} 18 - 16/(1 - b^2) = A, & 2x + by = B, \\ y\sqrt{1 - b^2} + 4/\sqrt{1 - b^2} = C. \end{cases}$$

На с. 62 рисунок 8 не соответствует задаче 3 варианта 10. Для понимания указания без чертежа: E и H — точки пересечения BP и BQ с AC , точка K лежит на AC .

Далее в задаче 4 того же варианта ответ должен быть 12 ч, а первое неравенство должно быть $s/(2v + u) + s/(2v - u) \geq 16$.

Ответы, указания, решения



Калейдоскоп «Кванта»
Задачи и головоломки

1. Можно. Согните вместе с бумажной полоской и накрывающий ее круг (рис. 1).
2. $DE=DA$ как касательные к одной окружности (рис. 2). Аналогично $CF=CB$, $CA=CG$ и $DH=DB$. Отсюда $DE+DB=AB=CF+CA=2AC+GF=2BD+HE$. Но $GF=HE$. Отсюда $AC=BD$.
3. 496018+6129=502147.

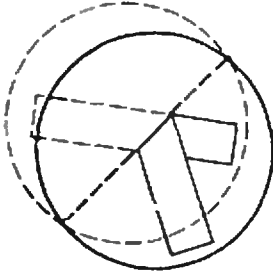


Рис. 1.

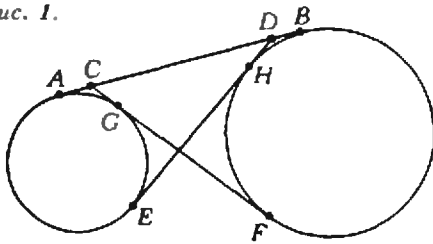


Рис. 2.

Тепловые процессы в газах

1. $V_B=2V_0$; $p_C=\frac{2}{3}p_0$; $p_D=p_0/3$.
2. $T_2-T_1=(T_1T_3-T_1^2)/T_1 \approx -117$ К.
3. $T=\sqrt[3]{B^2D}/(\nu R)$.
4. $\frac{\Delta m}{m} \approx \frac{\Delta T}{T} \approx \frac{1}{30} = 3\%$.
5. $C = \frac{3n+5}{2(n+1)}R$.

Ленинградский государственный университет
им. А. А. Жданова
Математика

Вариант 1

1. $a \in]-\infty; -3[\cup]1; +\infty[$. Указание. При $a \leq 4$ должно быть $[3-\sqrt{8-2a}, 3+\sqrt{8-2a}] \subset]3-\sqrt{5+a^2}, 3+\sqrt{5+a^2}[$, откуда $a < -3$ или $a > 1$, поэтому $a < -3$ или $1 < a \leq 4$. При $a > 4$ множество решений 1-го неравенства есть пустое множество.
2. $\{5\}$. Указание. После преобразований получим

$$\log_{x-2}(4x^2-19x+22) = \log_{\sqrt{4x-11}}(4x^2-19x+22),$$

откуда $4x^2-19x+22=1$ или $x-2=\sqrt{4x-11}$.
Корни первого уравнения являются посторонними.

3. $x_1 = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $x_2 = \frac{\pi}{3} + 2l\pi$ ($k, l \in \mathbb{Z}$). Указание. Возведя в квадрат, получим для новой переменной $z = \cos x$ уравнение $z(4z^2+4z-3)=0$, откуда $z=0$, $\frac{1}{2}$ или $-\frac{3}{2}$.

Если $\cos x=0$, то $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) и $\sin x = (-1)^k$, поэтому необходимо ограничиться четными k . Если $\cos x = \frac{1}{2}$, то $x = \pm \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ и $\sin x = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$, но из первоначального уравнения следует, что $\sin x \geq 0$.

4. $2\sqrt{2k-1}R$ ($\frac{1}{2} < k < 1$).

5. $[\frac{1}{2}, 1]$; $\frac{R}{2}$. Указание. Отношение площадей $k = \frac{x}{R} + \frac{1}{2}(1 - \frac{x^2}{R^2})$ ($0 \leq x \leq R$). Если $k = \frac{7}{8}$, то $x = \frac{R}{2}$.

Вариант 2

1. 80; 90; 92; 92 (рабочих). Указание. Найдите наибольшее значение функции $P=250-x-\frac{8464}{x}$ на отрезке $[1, N]$. При $N=80, 90$ ее наибольшее значение достигается на правом конце отрезка, а при $N=120, 150$ — в критической точке $x_0=92$.
2. $]0, 1[$. Указание. После преобразований получим неравенство $5-2x > 3^x$, откуда $x < 1$. С учетом области определения это дает $0 < x < 1$.

3. $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$). Указание. После преобразований получим уравнение $2+3\cos x + \cos^2 x = 2\sin x$. Возведя обе части уравнения в квадрат, получим для новой переменной $z = \cos x$ уравнение $z(z+1)(z^2+5z+12)=0$, откуда $z=0$ или -1 . Сделайте проверку.

4. $\frac{4(1+k)}{3k+1}S$, если $0 < k < 1$; $\frac{4(1+k)}{k+3}S$, если $k > 1$.

5. $\frac{\sqrt{3} \cos \beta/2}{\sqrt{-(1+2 \cos \beta)}} a^2$ ($\frac{2\pi}{3} < \beta < \pi$).

Вариант 3

1. $a=4$. Указание. После преобразований получим уравнение $x^2-(2+a)x+1=0$ с положительным дискриминантом. Для вычисления $x_1^2+x_2^2$ воспользуйтесь теоремой Виета.
2. $] -3, 7/3[\cup] 6, +\infty[$.

3. $x_1 = \frac{\pi}{4} + k\pi$; $x_2 = \frac{\pi}{2} + l\pi$ ($k, l \in \mathbb{Z}$).

4. $\sqrt{\frac{3}{5}(l^2-c^2)}$; $\sqrt{\frac{5}{3}(l^2-c^2)}$ ($l > c$).

5. $\arccos \frac{1-3 \cos^2 \alpha}{2}$ ($0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$).

Вариант 4

1. 4 кг; 17,5%.
2. $b=-2$; $x_{1,2}=1 \pm \sqrt{2}$. Указание. По теореме Виета, $x_1+x_2=-b$, $x_1 \cdot x_2=-1$, и $(x_1+1)+(x_2+1)=b$, $(x_1+1)(x_2+1)=-b$.

3. $\left\{ \pm \frac{\pi}{3} + 2k\pi, \frac{\pi}{5} + \frac{2k\pi}{5}, \frac{2k\pi}{3} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$.

4. 3 г. 5. $\frac{\cos \alpha/2 \operatorname{tg} \beta}{6 \sin^2 \alpha/2} a^3$.

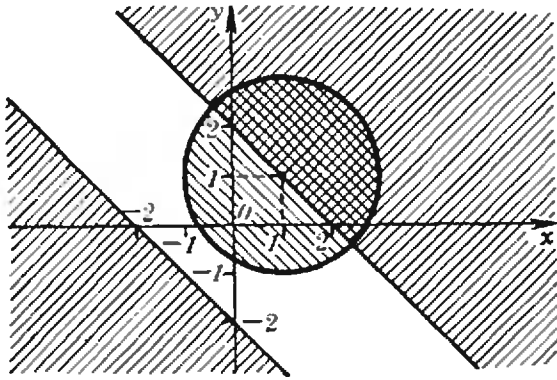


Рис. 3.

Вариант 5

1. 32 км; 24 км/ч.

2. $x = \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{6}$ ($k \in \mathbb{Z}$). Указание. После преобразований получите уравнение $\cos 6x \times \times (\cos 4x + 1) = 0$.

3.1. $\{-1; -\frac{1}{3}; \frac{1}{2}; \frac{2}{3}\}$. Указание. Выполните замену $z = 3x + \frac{1}{x}$.

3.2. $[-1; -\frac{1}{3}] \cup [\frac{1}{2}; \frac{2}{3}]$

4. 2л (см. рис. 3).

5. $\frac{32}{3}$ см³.

Вариант 6

1. 18 кг; 22 кг.

2.1. $x = \pm \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$). 2.2. $x_1 = \pm \frac{\pi}{6} + k\pi$;

$x_2 = \pm \frac{\pi}{3} + 8\pi$ ($k, l \in \mathbb{Z}$).

3.1.]1; +∞[. 3.2. {-2; 1}.

4. $\frac{5}{96} a^2$. 5. $\arccos(\cos \alpha \cos \beta)$.

Вариант 7

1. 1596 год. (В 1596 году родился Рене Декарт.) Указание. Записав искомый год в виде $1xyz$, где x — число сотен, y — число десятков, z — число единиц, получим $(1000 + 100x + 10y + z) + 5355 = 1000z + 100y + 10x + 1$. Число $z + 5$ оканчивается на 1. Поэтому $z = 6$.

2. $x_1 = a - \sqrt{-a^2 + 4a - 3}$, $x_2 = a + \sqrt{-a^2 + 4a - 3}$ ($1 \leq a \leq 3$). Если $1 \leq a \leq 2$, то $x_1 \leq 1 \leq x_2 \leq 4$; если $2 < a \leq 3$, то $1 \leq x_1 \leq x_2 \leq 4$.

3. $[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}]$. Указание. Неравенство можно записать в следующем виде: $2 \sin x (\cos 3x +$

$+\cos 2x + \frac{3}{2}) \leq 0$. Но $\cos 3x + \cos 2x + \frac{3}{2} = 2(\frac{3}{4} + \cos \frac{5x}{2} \cos \frac{x}{2}) \geq 2(\frac{3}{4} - \frac{1}{\sqrt{2}}) > 0$ для

$x \in [\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}]$, так как для таких x имеем $\frac{\pi}{4} \leq \frac{x}{2} \leq \frac{3\pi}{4}$, поэтому $|\cos \frac{x}{2}| \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$. Следова-

тельно, исходное неравенство равносильно неравенству $\sin x \leq 0$.

4. $\frac{a \sqrt{4b^2 - a^2}}{\sqrt{4b^2 - a^2} + 2a}$ ($b > \frac{a}{2} > 0$).

5. $\frac{a \sin \alpha / 2}{\sqrt{1 - 2 \cos \alpha}}$ ($\frac{\pi}{3} < \alpha < \pi$).

Физика

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Введем систему координат так, как показано на рисунке 4. Введем обозначения: v_0 — начальная скорость пули; α — угол наклона к горизонту, под которым вылетает пуля; B — точка, в которой находится шар при прохождении положения равновесия; C и D — точки максимального удаления шара от положения равновесия.

Пусть пуля вылетает из точки O в момент времени $t_0 = 0$ и попадает в точку B в момент времени t . Пуля движется по параболе и упадет в точку B при выполнении условий:

$$x(t) = L = v_0 \cos \alpha \cdot t,$$

$$y(t) = -l = v_0 \sin \alpha \cdot t - gt^2 / 2.$$

Чтобы шар с застрявшей пулей упал вертикально вниз, необходимо, чтобы сразу после обрыва нити горизонтальная составляющая импульса шара с пулей была равна нулю. Из закона сохранения импульса следует, что в этом случае

$$mv_0 \cos \alpha - Mv = 0,$$

где $v = \omega A = \sqrt{g/l} A$ — модуль скорости шара в точке B . Горизонтальная составляющая скорости пули и скорость шара в точке B направлены навстречу друг другу при выполнении условия

$$t = n \frac{T}{4},$$

где $T = 2\pi \sqrt{l/g}$, $n = 1, 5, 9, \dots$, если в момент $t_0 = 0$ шар находится в точке C и $n = 3, 7, 11, \dots$, если в начальный момент шар находится в точке D .

Из полученных выражений следует система трех уравнений с тремя неизвестными v_0 , α , t :

$$\begin{cases} v_0 \cos \alpha \cdot t = L, \\ gt^2 - 2v_0 \sin \alpha \cdot t - 2l = 0, \\ \frac{m}{M} = \sqrt{\frac{g}{l}} \frac{A}{v_0 \cos \alpha} \end{cases}$$

и условие «квантования» времени

$$t = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{l}{g}} n.$$

Решение системы дает:

$$v_0 = \sqrt{gl \left(\left(\frac{M}{m} \frac{A}{l} \right)^2 + \left(\frac{M}{m} \frac{A}{L} \right)^2 + \frac{1}{4} \left(\frac{m}{M} \frac{L}{A} \right)^2 - 1 \right)},$$

$$\alpha = \arctg \left(\frac{l}{L} \left(\frac{1}{2} \left(\frac{L}{A} \frac{m}{M} \right)^2 - 1 \right) \right),$$

тогда условие «квантования» принимает вид

$$\frac{m}{M} \frac{L}{A} = \frac{\pi}{2} n.$$

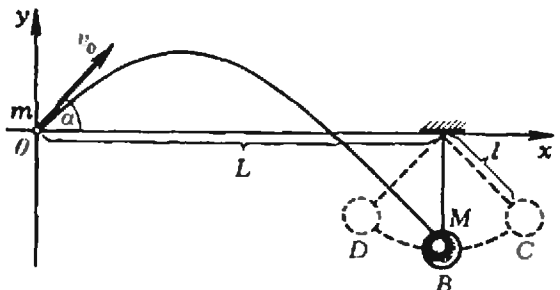


Рис. 4.

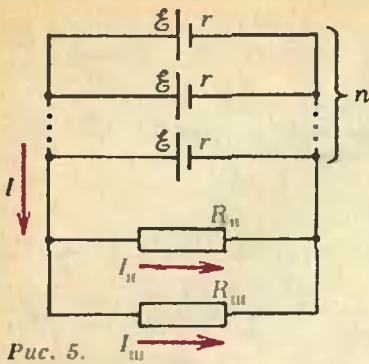


Рис. 5.

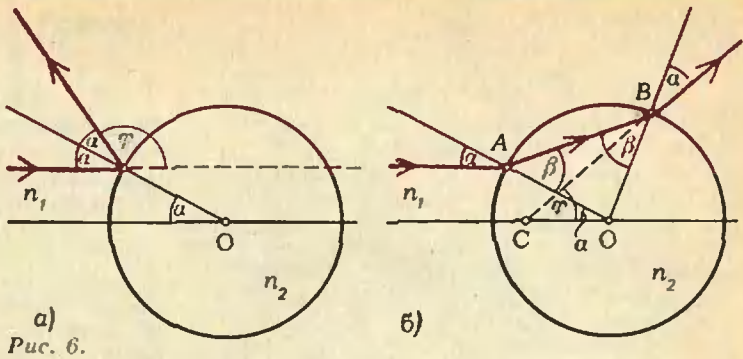


Рис. 6.

Таким образом, если выполняется это условие, то решение задачи дается выражениями для v_0 и α , а если нет, то задача не имеет решения. Нетрудно показать также, что задача может иметь решение только при $\alpha > 0$.

2. Обозначим через T_0 начальную температуру газа, а через T — конечную температуру газа в нижней части сосуда. Пусть M — молярная масса газа, m — масса газа в каждой части сосуда.

Запишем уравнения состояния идеального газа:

$$p_в V_в = \frac{m}{M} RT_в$$

$$p_н V_н = \frac{m}{M} RT_н$$

$$p'_в V'_в = \frac{m}{M} RT_0$$

$$p'_н V'_н = \frac{m}{M} RT$$

где индексы «в» и «н» относятся к верхней и нижней частям сосуда соответственно, «штрих» обозначает величины, соответствующие конечному состоянию газа; $V_в/V_н = 3$, $V'_в/V'_н = 4$. Условия равновесия поршня имеют вид:

$$p_в + p_0 = p_н$$

$$p'_в + p_0 = p'_н$$

где $p_0 = F/S$, F — сила тяжести поршня, S — площадь поршня.

Из полученных равенств найдем

$$\frac{T}{T_0} = \frac{47}{60}$$

3. Схема включения и обозначения токов и сопротивлений показана на рисунке 5, где индекс «н» относится к нагрузке, а «ш» — к шунту. Для нормального режима работы нагрузки требуется

$$I_ш = \frac{P}{U}$$

По закону Ома

$$I = \frac{\mathcal{E}}{\frac{r}{n} + \frac{R_н R_ш}{R_н + R_ш}}$$

где $n > 1$ — натуральное число. Очевидно, что

$$I = I_н + I_ш = \frac{U}{\frac{R_н R_ш}{R_н + R_ш}}$$

$$R_ш = \frac{U^2}{P}$$

Из полученных равенств следует

$$R_ш = \frac{U^2}{P} \frac{1}{n/b - 1}$$

где

$$b = \frac{Pr}{U^2} \frac{1}{\mathcal{E}/U - 1}$$

Так как $R_ш > 0$, то $n > b$, то есть n_{\min} — это ближайшее к b натуральное число (если b — натуральное число, то $n = b$, $R_ш \rightarrow \infty$ и для нормального режима работы нагрузки шунт не требуется). При заданных условиях $b = 6 \frac{1}{4}$. Следовательно, $n_{\min} = 7$ и

$$R_ш = 1 \frac{1}{3} \text{ Ом.}$$

4. Введем обозначение: $n_2/n_1 = n$. Так как по условию задачи $n < 1$, то возможно полное внутреннее отражение. Ход луча в этом случае показан на рисунке 6, а. Предельный угол падения определяется из соотношения $\sin \alpha_{\text{пр}} = n$. Но $l/R = \sin \alpha$. Поэтому для предельного значения «прицельного параметра» l имеем

$$l_{\text{пр}} = R \sin \alpha_{\text{пр}} = Rn$$

Таким образом, если $n_2/n_1 \leq l/R \leq 1$, то имеет место полное внутреннее отражение и искомый угол

$$\varphi = \pi - 2 \arcsin \frac{l}{R} \quad (1)$$

(при $l > R$ имеем тривиальный случай $\varphi = 0$). Ход луча при $l/R < n$ показан на рисунке 6, б. Из треугольников BOC и AOB имеем

$$\varphi + \alpha + (\alpha + (\pi - 2\beta)) = \pi,$$

откуда

$$\varphi = 2(\beta - \alpha).$$

Так как $\alpha = \arcsin(l/R)$ и $\beta = \arcsin(\sin \alpha/n) = \arcsin(l/(Rn))$, то при $l/R < n_2/n_1$ искомый угол

$$\varphi = 2 \left(\arcsin \frac{ln_1}{Rn_2} - \arcsin \frac{l}{R} \right) \quad (2)$$

Если $l/R = n_2/n_1$, то формулы (1) и (2) дают одинаковые результаты.

Вариант 2

1. Бруски движутся с одинаковыми ускорениями, если

$$1 - 4\mu < \frac{m_1}{m_2} < 1 + 4\mu.$$

2. Отношение объемов частей сосуда равно

$$V_1 : V_2 : V_3 = \frac{m_1 T_1}{M_1} : \frac{m_2 T_2}{M_2} : \frac{m_3 T_3}{M_3}$$

3. Если $\sqrt{R_1 R_2}/r$ — натуральное число и $R_1 \neq R_2$, то число аккумуляторов в батарее

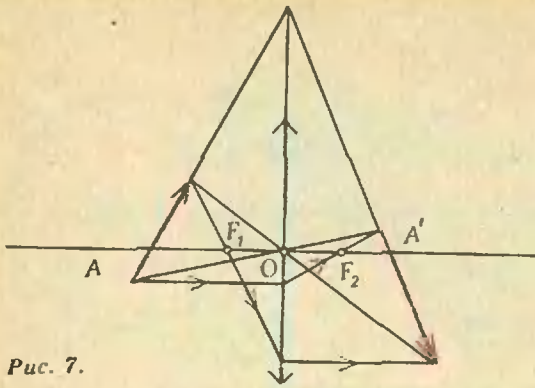


Рис. 7.

равно

$$n = \frac{\sqrt{R_1 R_2}}{r}$$

Если $\sqrt{R_1 R_2}/r$ — не натуральное число, то задача не имеет решения. При $R_1 \neq R_2$ получаем тривиальный случай: n — любое натуральное число.

4. Построение ясно из рисунка 7.

Задачи устного экзамена

- $h_1 = h/9 = 30$ м; $h_2 = 3h/9 = 90$ м; $h_3 = 5h/9 = 150$ м.
- $m_3 = 2m, m_2/(m_1 + m_2) = 99$ кг.
- $m = M/3 = 0,2$ кг.
- Атмосферное давление, выраженное в мм

рт. ст., равно $H_a = H + l_0 \frac{H_{a0} - H_0}{H_0 + l_0} \frac{T}{T_0} \approx 750$ мм рт. ст. (здесь $H_{a0} = 760$ мм рт. ст. и $T_0 = 273$ К — давление и температура при нормальных условиях).

$$5. \Delta P_2 = \Delta P_1 \left(1 - \frac{p_2 T_0}{p_0 T_2}\right) / \left(1 - \frac{T_0}{T_0 + \Delta T_1}\right) \approx 0,06 \text{ Н.}$$

- Число молекул воздуха в комнате уменьшилось на $(T_2 - T_1) \cdot 100\% / T_2 = 4\%$.
- Если $R > r$, то большая мощность выделяется при параллельном соединении резисторов, если $R < r$ — при последовательном.
- $U_{\max} = U(1 + R_x/R) = 1000$ В.
- $H = \sqrt{h_1 h_2}$.
- Зеркало следует поместить на расстоянии $l = 2,5F$ от линзы.

Ленинградский политехнический институт им. М. И. Калинина

Математика

Вариант 1

- $-\frac{120}{119}$ 2. $V = 4\pi, S = 2\pi\sqrt{13}$ 3. $\{0; 10\}$
- $T = \pi; f'(x) = -2 \sin 2x - \frac{3}{4}, x \neq \frac{\pi}{3} k, x \neq \pi k + \frac{\pi}{2}; k \in \mathbf{Z}$ 5. $x = -1$; при $\alpha = 2, \beta = 2, p(x) = (x^2 + 2x + 1)^2$; при $\alpha = 2, \beta = -2, p(x) = (x^2 - 1)^2$. Указание. При $\alpha = 2, \beta = -2$, получаем многочлен $(x^2 - 1)^2$. Его корень $x = -1$ является корнем многочлена $p(x)$ при любых α и β . Если многочлен $p(x)$ квадрат квадратного трехчлена, то $p(x) = (x + 1)^2(x^2 + ax + b)$ при некоторых a, b , причем $x^2 + ax + b$ — тоже полный квадрат.

Вариант 2

- $\log_2 5$ 2. $x_1 = \pi/k, x_2 = \frac{\pi}{6}(-1)^m + \frac{\pi}{2} m, k, m \in \mathbf{Z}$ 3. $(1 + \sqrt{61})/5$ 4. $\vec{NE} = \frac{2}{3} \vec{e}_1 - \frac{14}{3} \vec{e}_2$

Указание. Диагональ BD делится точками E и F на 3 конгруэнтных отрезка. 5. $D(f) = \left] -\frac{1}{6}; \frac{1}{5} \right[$. Указание. Докажите, что наибольшее значение функции $4\cos^2 x - 6e^{\cos 2x} + 2$ отрицательно.

Вариант 3

- $\{(9, 36); (36, 9)\}$.
- $\left] -\frac{9}{2}; -2 \right[\cup] 3; +\infty[$.
- $\{\log_2(6 - \sqrt{33}); \log_2(6 + \sqrt{33})\}$.
4. Указание. Докажите, что четырехугольник является ромбом.
- $D(f) = R \cdot \{ \pi k; k \in \mathbf{Z} \}$; f убывает на каждом промежутке $]\pi k; \pi(k+1)[$; $A < B$. Указание. $f'(x)$ отрицательна при всех $x \in]\pi k; \pi(k+1)[$, $k \in \mathbf{Z}$. Поэтому $f(2) > f(3)$, откуда следует, что $A < B$.

Физика

- $v_0 = \sqrt{5gl}$.
- Указание. Работа, совершаемая телом против силы сопротивления воздуха, равна изменению кинетической энергии воздуха, увлекаемого телом при его движении.
- $Q = 3mR\Delta T/(2M) \approx 2,3 \cdot 10^6$ Дж (здесь $R = 8,31$ Дж/(моль · К) — универсальная газовая постоянная).
- $\omega' = \omega_0 = 3 \cdot 10^{10}$ рад/с.
- $h_{\max} = a = 0,15$ м; $v_{\max} = a\sqrt{k/m} \approx 1,1$ м/с.
- $\Delta l_{\max} = \frac{mg}{k} + \sqrt{\left(\frac{mg}{k}\right)^2 + \frac{2mgh}{k}}$.
- $D = \frac{1}{F_1} + \frac{1}{F_2}$.

Ленинградский государственный педагогический институт им. А. И. Герцена

Физика

- $A = (m - m_0/g)g(h - (m/g)^{1/3}) = 117,6$ кДж.
- $\Delta l = g/(4\pi^2 v^2) = 0,01$ м.
- Изображение точки находится на расстоянии $f = F/2 = 5$ см от линзы и на расстоянии $b = a/2$ от главной оптической оси.

Математический факультет

- $l_1/l_2 = 3$.
- $t_3 = t_1 t_2 / (t_1 + t_2) = 10$ мин.

Индустриально-педагогический факультет

- Давление воздуха в колбе будет понижаться, процесс испарения воды усилится, вода будет интенсивно охлаждаться. Однако, если в какой-то момент давление воздуха окажется равным давлению насыщенных водяных паров, вода в колбе закипит.
- Мощность плитки увеличится в $10/9$ раза.

Естественный факультет

- $h = gt_2^2/2 = 125$ м (здесь $g = 10$ м/с²).
- $A = mR\Delta T/M \approx 1146$ Дж (здесь $R = 8,31$ Дж/(моль · К) — универсальная газовая постоянная, $M = 29 \cdot 10^{-3}$ кг/моль — молярная масса воздуха); $Q = cM\Delta T = 56000$ Дж.
- $W = Um/k \approx 1,2 \cdot 10^4$ Дж.

Ленинградский электротехнический институт им. В. И. Ульянова (Ленина)

Математика

Вариант 1

- $f_{\max} = f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{4}{9}$.
- $x \in]-\infty; -1[\cup]1; 2[$.
- При $k < 0$ — один корень, при $k \in \{0; 3\}$ — два, при $k > 0, k \neq 3$ — три.

1.4. Таких точек нет. Указание. Решите систему: $f(x_1)=f(x_2)$, $x_1+x_2=\frac{2}{3}$, $x_1 \neq x_2$. Для этого в первом уравнении системы перенесите $f(x_2)$ в левую часть и разложите ее на множители (один из множителей x_1-x_2).

2.2. $x=4$ или $x=6\frac{2}{3}$.

2.3. $x=10-\frac{8\sqrt{3}}{3}$.

3.1. При $0 < x < \frac{\sqrt{2}}{2}$ убывает, при $x > \frac{\sqrt{2}}{2}$ возрастает.

3.2. $x \in \{1; e^2\}$.

3.3. $k < 0$ или $k=2e$. Указание. Введите функцию $h(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$ и исследуйте ее с помощью производной, постройте график. Изучаемое уравнение равносильно уравнению $h(x)=k$.

Вариант 2

1.1. $x < 2$.

1.2. $x = -\log_3 6$.

1.3. $x > \log_3 \left(\frac{\sqrt{109}-1}{6} \right)$.

1.4. $a < 3 - \log_3 4$.

2.1. $S(a) = \operatorname{tg} a \cdot \operatorname{ctg}^2 \frac{a}{2}$.

2.3. $S_{\min} = 3\sqrt{3}$. Указание. Используйте результат п. 2.2.

2.4. $6\sqrt{3} < P < \infty$. Указание. $S(a) = \frac{1}{2} P \cdot r = \frac{1}{2} P$.

3.1. $V(R) = (R+0,1)^2(R^{-2}+0,2)$.

3.2. $R = (2\pi)^{-1/3}$.

Избранные школьные задачи (см. «Квант» № 3)

1. $x=1$. Указание. Заметив, что $x=1$ — корень уравнения, разложите многочлен $x^3 - 9x^2 + 27x - 19$ на множители:

$$x^3 - 9x^2 + 27x - 19 = (x-1)(x^2 - 8x + 19).$$

2. Обозначим 1984 через n . Тогда $1984 \cdot 1985 \times 1986 \cdot 1987 + 1 = n(n+1)(n+2)(n+3) + 1 = (n^2+3n)(n^2+3n+2) + 1$.

Положив теперь $n^2+3n+1=m$, получим $1984 \times 1985 \cdot 1986 \cdot 1987 + 1 = (m-1)(m+1) + 1 = m^2$.

3. Указание. Площадь четырехугольника, вершинами которого являются середины сторон данного четырехугольника (кстати, отметим, что это параллелограмм), равна половине площади исходного четырехугольника.

4. Заметим, что $6(x+7y) = (6x+11y) + 31y$. Поэтому из условия следует, что число $6(x+7y)$ делится на 31.

5. 70 км. Решение. Велосипедисты до встречи ехали 2 часа. За это время муха-слепень пролетела 100 км, а от пункта А сместилась на 40 км. Если обозначить через x количество километров, которое она пролетела в направлении от А к В, в через y — количество километров, которое муха пролетела в направлении от В к А, то получим систему $x+y=100$, $x-y=40$. Поэтому $x=70$.

6. Область определения данной функции — промежуток $[1; +\infty)$. Заметим, что ее квадрат, то есть y^2 , равен

$$\left[\frac{1}{2} (\sqrt{x+2\sqrt{x-1}} - \sqrt{x-2\sqrt{x-1}}) \right]^2 = \frac{1}{4} (2x - 2\sqrt{x^2 - 4x + 4}) = \frac{1}{2} (x - |x-2|) =$$

$$= \begin{cases} x-1 & \text{при } x \leq 2, \\ 1 & \text{при } x > 2. \end{cases}$$

Теперь легко построить график функции

$$y = \begin{cases} \sqrt{x-1} & \text{при } 1 \leq x \leq 2, \\ 1 & \text{при } x > 2 \end{cases}$$

— см. рисунок 8.

7. $\lg^2 11 = (1 + \lg 1,1)^2 > 1 + 2 \lg 1,1 = 1 + \lg 1,21 = \lg 12,1 > \lg 12$.

8. Пусть M и N — середины сторон BC и AD соответственно (рис. 9). Отрезок MP параллелен стороне AB и $MP=AB$, а отрезок MQ параллелен стороне CD и $MQ=CD$. Рассмотрим треугольники ANP и DNQ . Они равны, ибо $AN=ND$, а отрезки AP и QD равны и параллельны. Поэтому $PN=NQ$. Следовательно, отрезок MN — медиана в треугольнике MPQ . Отрезок PK параллелен отрезку MQ и $PK=MQ$. Поэтому $MPKQ$ — параллелограмм. По условию $MN = \frac{1}{2}(AB+CD)$. Поэтому $MK = 2 \cdot MN = AB +$

$+CD = MP + MQ = MP + PK$. Следовательно, точки P , M и K лежат на одной прямой. А это означает, что отрезки AB и CD параллельны.

9. Не существуют. Решение. Поскольку $f(0) \cdot g(0) = 1$, получаем $f(0) \neq 0$. Аналогично, поскольку $f(1) \cdot g(-1) = 1$, $g(-1) \neq 0$.

Но это противоречит тому, что $f(0)g(-1) = 0$.

10. Указание. Воспользуйтесь следующим фактом: если точки M , N , P , K лежат на сторонах AB , BC , CD , DA квадрата $ABCD$ и отрезок MP перпендикулярен отрезку NK , то $MP=NK$.

11. $\cos 1 \cdot \sin 1$. Решение. Поскольку $\sin 1 + \cos 1 = \sqrt{2} \cdot \sin \left(1 + \frac{\pi}{4} \right) < \sqrt{2} < \frac{\pi}{2}$, получаем

$$\cos \sin 1 = \sin \left(\frac{\pi}{2} - \sin 1 \right) > \sin \cos 1.$$

12. 27. Решение. Положим $x-y=n$. Тогда $x+y=n^2$, откуда $x = \frac{n(n+1)}{2}$, $y = \frac{n(n-1)}{2}$.

Это — целые числа при любом n . Мы получаем, что целочисленные решения нашего уравнения имеют вид $\left(\frac{n(n+1)}{2}; \frac{n(n-1)}{2} \right)$.

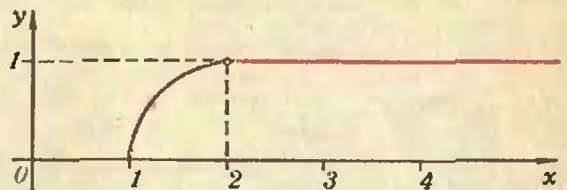


Рис. 8.

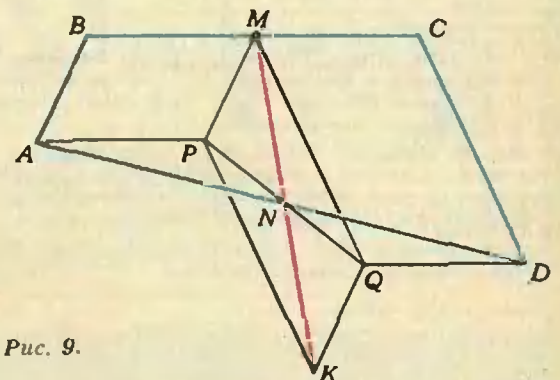


Рис. 9.

Неравенства $|x| < 100$, $|y| < 100$ выполняются при $|n| \leq 13$.

13. Обозначим основания трапеции через a и b , высоты соответствующих треугольников — через h_a и h_b . Тогда

$$s = \frac{a+b}{2}(h_a+h_b); s_1 = \frac{ah_a}{2}; s_2 = \frac{bh_b}{2}.$$

Из подобия $\frac{b}{a} = \frac{h_b}{h_a}$. Обозначим $\frac{b}{a} = t$. Итак, $b = ta$, $h_b = th_a$. В таком случае

$$s = (t+1)^2 \cdot \frac{bh_b}{2}; s_1 = t^2 \cdot \frac{bh_b}{2}; s_2 = \frac{bh_b}{2}.$$

Отсюда следует искомое равенство.

14. $a=5$. Решение. Выражение

$$x^2 + y^2 = (x+y)^2 - 2xy = (a-1)^2 - 2(a^2 - 7a + 14) = -a^2 + 12a - 27 \quad (1)$$

как функция от a представляет собой квадратный трехчлен, определенный для тех a , для которых существуют действительные x и y , удовлетворяющие условию задачи. Эти значения x и y определяются системой

$$\begin{cases} x+y=a-1, \\ xy=a^2-7a+14, \end{cases}$$

а значит, x и y удовлетворяют квадратному уравнению $t^2 - (a-1)t + a^2 - 7a + 14 = 0$, дискриминант которого равен $-3a^2 + 26a - 55$. Этот дискриминант неотрицателен при $11/3 \leq a \leq 5$. Следовательно, действительные значения x и y существуют только для тех a , которые принадлежат промежутку $[11/3; 5]$. Наша задача состоит в том, чтобы на отрезке $[11/3; 5]$ найти такое a , при котором трехчлен (1) принимает наибольшее значение. Вершина параболы $b = -a^2 + 12a - 27$ имеет абсциссу $a=6$, что расположено правее отрезка $[11/3; 5]$. Наибольшее значение выражения (1) достигается, следовательно, на правом конце этого промежутка, то есть при $a=5$.

15. Если n четно, то правильный $(n+2)$ -угольник получиться может, если n нечетно, то не может. Указание. Достаточно заметить, что в правильном $(n+2)$ -угольнике в случае нечетного n нет пары параллельных сторон.

Шахматная страничка

(см. «Квант» № 1)

Задание 1 (Л. Куббель, 1941 г.) 1. Фh1 f1Ф(Л, С) 2.Фe4×; 1...f1К 2.Фh5×; 1...С — любой ход 2.Фd1×.

Задание 2 (Л. Куббель, 1941 г.) 1. d7 Крc7 2. b8К! Кр:b8 3. d8Ф×; 2...Крd8 3. Сb6×.

Главный редактор — академик Ю. А. Осипьян

Первый заместитель главного редактора — академик А. Н. Колмогоров

Заместители главного редактора: Л. Г. Асламазов, А. А. Леонович, В. А. Лешковцев, Ю. П. Соловьев

Редакционная коллегия: А. А. Абрикосов, М. И. Башмаков, В. Е. Белонучкин, В. Г. Болтянский, А. А. Боровой, Ю. М. Брук, В. В. Вавилов, А. А. Варламов, Н. Б. Васильев, С. М. Воронин, Б. В. Гнеденко, В. Л. Гутенмахер, Н. П. Долбидин, В. Н. Дубровский, А. Н. Земляков, А. Р. Зильберман, С. М. Козел, С. С. Кротов, Л. Д. Кудрявцев, Е. М. Никишин, С. П. Новиков, М. К. Потапов, В. Г. Разумовский, Н. А. Родина, Н. Х. Розов, А. П. Савин, Я. А. Смородинский, А. Б. Сосинский, В. М. Уроев, В. А. Фабрикант

Редакционный совет: А. М. Балдин, С. Т. Беляев, Б. Б. Буховцев, Е. П. Велихов, И. Я. Верченко, В. В. Воздвиженский, Г. В. Дорофеев, Н. А. Ермолаева, А. П. Ершов, Ю. Б. Иванов, Л. В. Канторович, В. А. Кириллин, Г. Л. Коткин, Р. Н. Кузьмин, А. А. Логунов, В. В. Можжаев, В. А. Орлов, Н. А. Патрикеева, Р. З. Сагдеев, С. Л. Соколов, А. Л. Стасенко, И. К. Сурин, Е. Л. Сурков, Л. Д. Фаддеев, В. В. Фирсов, Г. Н. Яковлев.

Номер подготовили:

А. Н. Виленкин, В. И. Дубровский, А. А. Егоров,
И. Н. Клумова, Т. С. Петрова,
А. В. Сосинский, В. А. Тихомирова

Номер оформили:

Е. В. Винодарова, М. Б. Дубах, С. Г. Захаров,
С. В. Иванова, Д. А. Крымов, В. Г. Марковский,
И. Е. Смирнова, Е. К. Тенчурина,
П. И. Чернуцкий, В. Б. Юдин

Фото представили:

В. Е. Пермитин

Заведующая редакцией Л. В. Чернова

Редактор отдела художественного оформления
С. В. Иванов

Художественный редактор Т. М. Макарова

Корректор Т. С. Вайсберг

103006 Москва К-6,

ул. Горького, 32/1. «Квант»,
тел. 250-33-54

Сдано в набор 20.2.86. Подписано к печати 24.3.86

Печать офсетная. Усл. кр.-отт. 23,8

Бумага 70×108 1/16

Усл. печ. л. 5,6. Уч.-изд. л. 7,39. Т-07631

Тираж 201 349 экз.

Цена 40 коп. Заказ 368

Ордена Трудового Красного Знамени
Чеховский полиграфический комбинат

ВО «Союзполиграфпром»

Государственного комитета СССР

по делам издательства, полиграфии

и книжной торговли

142300, г. Чехов Московской области

Шахматная страничка



Консультирует — экс-чемпион мира по шахматам, международный гроссмейстер А. Е. Карпов. Ведет страничку мастер спорта СССР по шахматам, кандидат технических наук Е. Я. Гик.

НЕПОДВИЖНЫЕ ФИГУРЫ

Первый русский шахматный мастер А. Петров в прошлом веке придумал задачу, в которой белому королю запрещалось ходить.



А. Петров, 1841 г.
Мат в 25 ходов
(не двигая белого короля).

Белым надо заставить черного короля приблизиться к белому. 1. Кс3 Крг7 2. Ла6 Крh7 3. Ке4 Крг7 4. Кг3 Крh7 5. Кf5 Крг8 6. Лг6+ Крh7 7. Лh6+ Крг8 8. Лh1 Крf7 9. Лg1 Крf6 10. Кd6 Кре5 11. Лf1 Кре6 12. Кf7 Кре7 13. Кg5 Кре8 14. Лf7 Крд8 15. Кh7 Кре8 16. Лg7 Крд8 17. Кf6 Крс8 18. Лd7 Крb8 19. Ке8 Крс8 20. Лd6 Крb8 21. Лс6 Крb7 22. Кd6+ Крb8 23. Лс8+ Кра7 24. Лb8 Кра6 25. Ла8×.

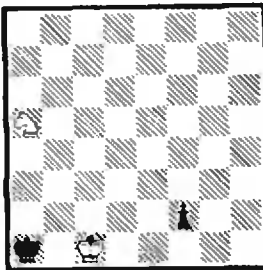
Удивительное дело — прошло сто тридцать лет, и подобная задача с неподвижным королем вошла в историю ... программирования на ЭВМ.

У белых король на поле с3 и ферзь, у черных один король. Могут ли белые выиграть, не делая ходов своим королем?

Эта задача стала первой шахматной задачей, которую машина решила раньше, чем человек. Подробно о том, как справился с ней компьютер, можно прочитать в вышедшей недавно книге А. Л. Брудно и Л. И. Каплана «Олим-

пнады по программированию для школьников» (М., 1985, с. 73). Для тех, кто наивно полагает, что эту задачу можно решить полным перебором вариантов, авторы книги приводят несложный расчет, который показывает, что подобный анализ (на ЭВМ!) займет миллиарды лет. Задача решается при помощи так называемого ретроспективного анализа — расчет производится не вперед, а назад. Сначала находятся заключительные позиции, в которых черный король заматован. Затем берутся позиции, из которых заключительные получаются в 1 ход, и т. д. В результате все позиции на доске ранжируются, ранг позиции — это число ходов, которые должны сделать белые, чтобы объявить мат (при наилучших действиях обеих сторон). Таким способом авторы программы А. Брудно и И. Ланда установили, что при белом короле на с3 мат всегда дается не позднее 23-го хода. Подробное решение приведено в «Кванте» № 11 за 1981 год, с. 58.

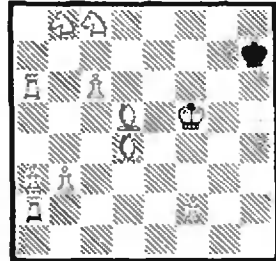
В сказочной шахматной композиции есть необычный жанр задач, в которых все фигуры одной из сторон вообще не ходят или делают лишь один ход — последний, ставя мат королю противника. Решение такой задачи содержит серию ходов лишь одной стороны (белых или черных), поэтому такие задачи называются серийными. При этом обязательным условием является единственность серии ходов, т. е. при любой другой последовательности ходов мат ставится позднее, чем требуется в задании.



Т. Доусон, 1947 г. Серийный кооперативный мат в 17 ходов.

Это задание означает, что ходят только черные, а когда они сплетут матовую сеть своему королю, белым разрешается сделать один ход (поставить мат).

1—7. Кра2—а3—b4—с3—d3—e2—e1. 8. f1Л9. Лf2 10—16. Кре2—d3—с3—b4—а3—а2—а1 17. Ла2. Теперь белые, наконец, могут сыграть — Кb3×. Решение обычно записывается в сокращенном виде: 7. Кре1 8. f1Л9. Лf2 16. Кра1 17. Ла2 Кb3×. Очевидно, серия черных ходов является единственной.



П. Кате, 1965 г. Серийный кооперативный мат в 60 ходов.

Рекордная задача! Не сразу разберешься, как черному королю свить матовое гнездо. 1. Крh6 12. Кра2 16. Кр:d4 19. Кр:f2 29. Кр:b8 44. Кра6 60. Кра8 с7×.

Вот еще три серийные кооперативные задачи.

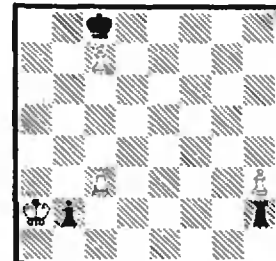
Белые: Кра6, Фе1, Се6; черные: Крh2. Мат в 14 ходов. 14. Кра4 Фа5×.

Белые: Крс6, Лс1, Сс3, па3; черные: Кра6. Мат в 24 хода. 12. Кра3 24. Кра6 (король забрал пешку а3 и тем же маршрутом вернулся на исходное место) Ла1×.

Белые: Крf5, Фе2, Кг6, Кh5, пh3; черные: Крг3. Мат в 36 ходов. 12. Кр:h5 24. Кр:h3 36. Крh5 Фh2×.

Конкурсные задания

7. Доска имеет форму прямоугольника 4×16. Белые: Крд15, Лс16; черные: Кра8. Белая ладья может сделать лишь один ход. Могут ли белые выиграть?



8. Белые начинают и выигрывают.

Срок отправки решений — 20 июня 1986 г. с пометкой на конверте: «Шахматный конкурс «Кванта», задания 7, 8».

Цена 40 коп.

Индекс 70465

25 лет назад гражданин Советского Союза коммунист Юрий Алексеевич Гагарин открыл человечеству дорогу в космос.

С тех пор проделана огромная работа; год от года растет роль космических исследований в нашей жизни. Космонавты всесторонне исследуют нашу планету, помогая решать важные задачи народного хозяйства.

Советский Союз прилагает огромные усилия к тому, чтобы космос всегда оставался ареной международного сотрудничества, мирных ис-

следований и разработок. По иному относятся к этой проблеме в США, где администрация и военно-промышленный комплекс упорно пытаются вовлечь человечество в подготовку к «звездным войнам», которые могут погубить цивилизацию. Понимая чудовищные масштабы грозящей опасности, народы разных стран активно включаются в борьбу за мирный космос. И в первых рядах борцов за мир и всеобщее разоружение последовательно выступает советский народ.

9.33 вошёл в тень
Земли. В миг
не было видно

9.42 В тени. Самолет

Андр

разче

ше му

IV 61 - ГАГАРИН

